序 言

Н.В.巴格莫洛夫著的《数学自学指南》(Практические Занятия По Математике) 一书包括“计算数学”、“代数与分析”和“几何”三部分。本书是根据第二和第三两部分编译的。

本书的特点是结构新颖，内容充实，适于自学。每章开头简要介绍基础知识，然后精选典型例题，讲解通俗易懂，深入浅出。在本书中，凡是可能的地方，把习题按类型进行了分类。为便于自学，例题与习题穿插安排，以利于读者模仿。在每章的“综合题”中，还配备了对于进行练习来说是必须数量的习题，以加深读者巩固基础知识，掌握解题方法，提高综合运用数学知识的能力。每章最后还配有两组完全不同的自测题，读者可以自我检查学习效果。只要读者有决心，完全可以在没有教师讲解或指导的情况下，靠自学从头到尾地读完这本书，掌握书中讲述的概念与解题的方法和技巧。

本书可供高中学生、中学数学教师、自学青年、中师、中专和中技师生阅读参考，对于立志走自学成材道路的社会青年也是一本理想的读物。

在编译过程中，魏仲和、王元瑞等同志校阅了部分章节，在此表示谢意。

由于时间仓促，再加上编译水平有限，书中难免存在缺点和错误，请读者批评指正。

王 书

1986年10月1日

目　录

第一篇　三角函数

第二篇　平面解析几何

第三篇 立体几何

第一篇　三角函数

第一章　三角函数与三角函数的性质

§1.　弧和角的弧度制

1.　用弧度制度量的基本公式

当用弧度制去度量弧（相应于它所对的圆心角）时，我们用弧度作为度量的单位，即弧长等于半径的弧叫做1弧度。

弧的弧度数可按下列公式计算

$$a = \frac{l}{R} \tag{1.1}$$

这里，a——弧的弧度数，l——圆的弧长，R——这弧的半径。

由角度制变为弧度制的公式为

$$a = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \tag{1.2}$$

这里α为角度制的弧（角）的度数。

1°等于0.0175弧度。

由弧度制变为角度制的公式为

$$\alpha=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot a \tag{1.3}$$

1 弧度等于57°17′44.8″≈57.3°。

圆弧的长等于圆弧的弧度数与这个弧的半径的乘积：

$$l=a\cdot R \tag{1.4}$$

扇形的面积等于扇形的弧的弧度数与圆半径平方乘积的一半。

$$S_{扇形}=\frac{aR^2}{2} \tag{1.5}$$

2. 有关点的旋转运动的基本概念

物体绕固定轴作旋转运动时有两种不同的速度概念，即线速度和角速度。

物体作旋转运动时物体上任何一点的速度称为线速度。

沿着半径为R的圆作匀速圆周运动的质点的线速度 v 可按下面的公式计算。

$$v=\frac{2\pi R}{T} \tag{1.6}$$

这里T是旋转周期，即质点旋转一周所用的时间。

线速度v同R和n（每秒钟内质点转动的圈数）之间的关系用下面的公式表示。

$$v=2\pi Rn \tag{1.7}$$

每秒钟内转的圈数n和旋转周期T之间的关系用下面的公式表示。

$$T=\frac{1}{n} \tag{1.8}$$

作匀速圆周运动的物体上任意一点到轴心的半径在一秒钟内所转过的角度称为角速度。角速度用每秒若干弧度（弧度/秒）来表示。

角速度ω和旋转周期T之间的关系用下面的公式表示。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.9}$$

角速度ω和每秒转的圈数n之间的关系用下面的公式表示。

$$\omega = 2\pi n \tag{1.10}$$

到转动轴的距离为R的质点的线速度与它的角速度之间的关系表示为下式。

$$v = \omega R \tag{1.11}$$

作变速旋转运动的物体上任意一点在时间t内角度φ的变化速度称为它的角速度ω。这时，角速度为旋转角度φ关于时间t的导数。

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{1.12}$$

角速度可用 弧度/秒 表示。

角的加速度ε是角速度ω关于时间t的导数。

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \tag{1.13}$$

角的加速度用 弧度/秒^2 表示。

1． 求下列各角的弧度精确值：

1） 240°； 2） 300°； 3） 315°； 4） 360°。

解：按照公式（1.2）得：

1） $\alpha=\frac{\pi}{180°}\cdot240°=\frac{4\pi}{3}$；

2） $\alpha=\frac{\pi}{180°}\cdot300°=\frac{5\pi}{3}$；

3） $\alpha=\frac{\pi}{180°}\cdot315°=\frac{7\pi}{4}$；

4） $\alpha=\frac{\pi}{180°}\cdot360°=2\pi$。

2． 把下列角度化成精确的弧度值：

1） 30°； 2） 45°； 3） 60°； 4） 90°；

5） 120°； 6） 135°； 7） 150°； 8） 180°；

9） 210°； 10） 225°； 11） 270°； 12） 330°。

3． 查表求下列角的弧度数：

1） 15°18′； 2） 71°10′； 3） 15°17′； 4） 115°44′；

5） 215°10′； 6） 312°19′； 7） 57°25′； 8） 87°30′。

4． 利用对数计算尺求下列角的弧度数：

1） 14.5°； 2） 27.3°； 3） 75°；

4） 130°； 5） 38.7°； 6） 86°。

5． 把下列各弧度的角化为角度制的角：

1） $\frac{7\pi}{6}$； 2） $\frac{5\pi}{4}$； 3） $\frac{2\pi}{3}$。

解：按照公式（1.3）得：

1） $\alpha=\frac{180°}{\pi}\cdot\frac{7\pi}{6}=210°$；

2） $\alpha=\frac{180°}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{4}=225°$；

3）$\alpha=\frac{180°}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3}=120°$。

6．求下列弧度的角度数：

1）$\frac{5\pi}{36}$；　2）$\frac{7\pi}{12}$；　3）$\frac{11\pi}{18}$；　4）$\frac{5\pi}{9}$；

5）$\frac{11\pi}{20}$；　6）$\frac{13\pi}{30}$；　7）$\frac{11\pi}{6}$；　8）$\frac{4\pi}{3}$。

7．查表求下列各弧度的角度数：

1）0.03008；　2）0.5728；　3）1.0472；

4）1.3454；　5）1.4850；　6）1.7453。

8．半径为0.65米的车轮转动了1.4弧度，求车轮转过的路程的长度。

解：根据公式（1.4），我们求得

$l=1.4\times0.65=0.9$（米）。

9．如果长度为0.84米的弧含有1.5弧度，求这条弧所在圆周的半径。

10．已知一个扇形的弧含有0.85弧度，而扇形的半径为0.38米，求扇形的弧长。

11．扇形的弧为0.94弧度。如果扇形的半径为0.65米，求扇形的面积。

解：根据公式（1.5），我们求得

$S_{扇形}=0.5\times0.94\times0.65^2=0.20$（米²）。

12．圆的半径为0.56米，而扇形的面积为0.72米²，求扇形的弧的弧度数。

13．面积为0.39米²的扇形的弧为1.4弧度，求扇形的半径。

14．半径为0.45米的皮带轮作匀速旋转运动时每分钟转

180转，求轮子边缘某点的线速度。

解：求每秒的转数：

$$n=\frac{180}{60}=3。$$

根据公式（1.7），我们求得轮子外缘的线速度：

$$v=2\pi\times0.45\times3\approx8.5\text{（米/秒）}。$$

15．轮子上距中心0.56米的点在轮子匀速旋转时的线速度为4.6米/秒，求轮子的旋转周期。

解：利用公式（1.6），我们求得：

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi\times0.56}{4.6}\approx0.77\text{（秒）}。$$

16．半径为0.24米的车轮在匀速转动时轮缘的线速度为4.8米/秒，求轮子每秒钟的转数。

17．飞轮匀速转动时，轮缘上的点的线速度为1.6米/秒，旋转周期为$\frac{\pi}{4}$秒，求飞轮的半径。

18．轮子作旋转运动时，距旋转轴0.12米的点的线速度为0.48米/秒，求轮子的旋转周期。

19．轧辊匀速转动时每分钟转600转，求轧辊的角速度和旋转周期。

解：轧辊每秒钟的转数为：

$$n=\frac{600}{60}=10。$$

我们利用公式（1.10）和（1.8）可以求得：

$$\omega=2\pi\cdot10=20\pi\text{（弧度/秒）}，$$

$$T=\frac{1}{10}=0.1\text{（秒）}。$$

20．半径为0.64米的飞轮在匀速旋转时，其边缘上的线速度为256米/秒，求飞轮的角速度。

解：利用公式（1.11）并将v和R用已知数值代替，我们求得：

$$\omega=\frac{v}{R}=\frac{256}{0.64}=400\ （弧度/秒）。$$

21．半径为0.125米的车轮以24弧度/秒的角速度作匀速旋转运动，求车轮外缘上的点的线速度。

22．轧辊匀速旋转时的角速度为10π弧度/秒，求轧辊每秒钟的转数。

23．齿轮匀速旋转时的角速度为$\frac{\pi}{3}$弧度/秒，求它的旋转周期。

24．飞轮在刹闸时的旋转角度φ与时间t的关系为$\varphi=3+8t-t^2$，求：

1）在$t=3$秒时飞轮旋转的角速度；

2）在时刻t的角加速度；

3）飞轮停止的时刻。

解：1）角速度是旋转角度φ关于时间t的导数，即$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=8-2t$。在$t=3$秒时的角速度为：

$$\omega_{t=3}=8-2\times3=2\ （弧度/秒）；$$

2）角加速度ε是角速度ω关于时间t的导数，即

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=-2\ （弧度/秒^2）；$$

3）设$\omega=0$，我们求得时间t：

$8-2t=0$，$t=4$（秒）。

5　物体按照规律$\varphi=10t-t^2$绕轴旋转，求：

1）物体在$t=2$秒时旋转的角速度；

2）在t秒时的角加速度；

3）物体停止旋转的时刻。

26．三角形的三个内角的比是1:3:5，求它们各等于多少弧度。

27．四个点把圆周分为3:4:5:6四部分，试按弧度制计算对应弧的值。

28．如果五边形的内角之比为2:4:5:6:7，试计算各角的弧度数。

29．以$R=0.12$米为半径画弧，使它等于2.5弧度，求弧长。

30．一条弧等于$\frac{4\pi}{15}$弧度，求它所对的圆周角的弧度数。

31．一条弧等于$\frac{5\pi}{9}$弧度。试问弧上的点和弧所对弦的两端的连线所组成的角是多少弧度？

32．计算钟表的时针、分针和秒针的角速度（弧度/秒）。

33．半径为0.6米的车轮以每分钟480转的速度匀速转动，求：

1）轮子的角速度；

2）轮上距轴心0.1米的点的线速度；

3）车轮外缘的线速度。

34．一个物体绕固定轴旋转的规律是：$\varphi=5+18t-3t^2$（φ—弧度数，t—秒），求这个物体停止旋转的时刻。

§2. 单 位 圆

以坐标原点为圆心，以1个单位长为半径的圆叫做单位圆。单位圆的方程为$x^2+y^2=1$（图1）。

单位圆上的一点A（1，0）绕坐标原点旋转角α后到达点$M_\alpha=R^\alpha$（A）。旋转R^α由下列条件给定：a）旋转中心（坐标原点）；b）旋转角α；c）旋转方向。和点（1，0）一样，点M_α也在单位圆上。

按照逆时针旋转的方向为正方向，而按照顺时针旋转的方向为负方向。

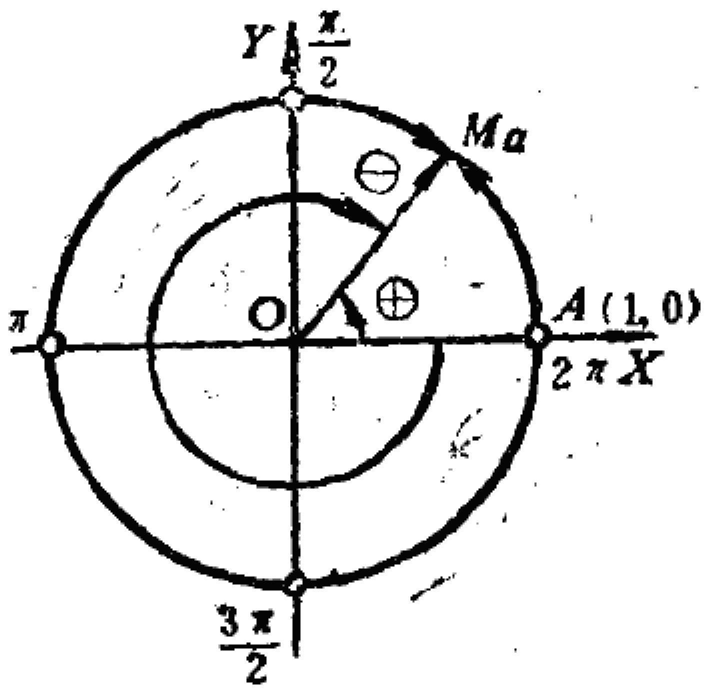


图 1

点A（1，0）是弧的计量的起点（无论是正的还是负的）。

第Ⅰ象限的弧在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内，第II象限的弧在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$内，第III象限的弧在区间$\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$内，第Ⅳ象限的弧在区间$\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$内。

具有已知起点A和终点M的弧（给定了始边和终边的角）存在一个无穷集合。这个弧（角）的集合不论是正的还是负的，可统一用下列公式表示。

$$\alpha=2\pi k+\alpha_1,\ 或\alpha=360^\circ k+\alpha_1 \quad (1.14)$$

这里 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$，$k\in Z$。

如果在单位圆中每一个实数α都和一个弧度数为α的弧AM的终点M_α相对应，那么这样的单位圆称为数值单位圆。

整个数值单位圆的长度等于2π。如果两个数彼此相差2π的整数倍，那么在数值单位圆上它们对应同一个点。如果两个数对应于数值单位圆上的同一个点，那么它们相差2π的整数倍。

35．在单位圆中指出：

1）弧$\overset{\frown}{AM}=17\pi$的终点$M$；

2）$\overset{\frown}{AM}=1950°$的终点$M$；

3）弧$\overset{\frown}{AM}=-1380°$的终点$M$。

解：1）按照公式（1.14）我们可得到：

$$17\pi=16\pi+\pi=2\pi\times8+\pi,\ k=8.$$

$\overset{\frown}{AM}$的终点为M（-1，0）；

2）我们求得$\overset{\frown}{AM}=1950°=360°\times5+150°$，$k=5$。

$\overset{\frown}{AM}$的终点M在第II象限；

3）我们有$\overset{\frown}{AM}=-1380°=360°\times(-4)+60°$，$k=-4$。

$\overset{\frown}{AM}$的终点M在第I象限。

这里弧α_1用绝对值最小的数（$\alpha_1=60°$）来表示。为了使α_1的绝对值最小，它应该在区间$0\leqslant\alpha_1<180°$，或$-180°<\alpha_1\leqslant0$内来取值。

36．指出下列各弧的终点在单位圆的第几象限内：

1）$120°$；　2）$315°$；　3）$-220°$；　4）$850°$；

5）$500°$；　6）$-120°$；　7）$\frac{\pi}{4}$；　8）$\frac{7\pi}{6}$；

9) $-\frac{5\pi}{3}$; 10) $\frac{4\pi}{15}$; 11) $\frac{8\pi}{3}$; 12) $-\frac{5\pi}{4}$;

13) 0.76; 14) 5.8; 15) −7.2; 16) −3.7;

17) 15; 18) 3.3。

37. 按照公式（1.14）表示下列角α，使α_1的绝对值最小：

1) $\alpha=2200°$; 2) $\alpha=-550°$; 3) $\alpha=-740°$;

4) $\alpha=1170°$; 5) $\alpha=-1450°$; 6) $\alpha=520°$。

38. 写出单位圆中满足下列条件的弧的端点的一般形式：1）弧的终点横坐标为零；2）弧的终点纵坐标为零。

解：1）弧$\frac{\pi}{2}$和$\frac{3\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$的终点横坐标等于零，因此，终点横坐标等于零的弧的集合可表示为：$\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$；

2）弧0（2π）和π的终点的纵坐标等于零，因此，终点纵坐标等于零的弧的集合可表示为：$k\pi$，$k\in Z$。

39. 写出具有下列终点的弧的一般形式：

1) $A(1,0)$; 2) $B(0,1)$; 3) $C(-1,0)$; 4) $D(0,-1)$。

40. 由点A（1，0）开始，将单位圆分成12等分，写出各分点表示的弧的集合。

41. 在$k=-2$，-1，0，1，2时，求下列弧的值：

1) $k\pi$; 2) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$; 3) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$;

4) $k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$。

42. 在单位圆中画出满足下列条件的角α：

1) $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{6}$;

4) $-\frac{2\pi}{3}<\alpha<0$；　5) $|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{3}$；　6) $|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{2}$。

43. 在单位圆中，1) 作出同$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，$-\frac{2\pi}{3}$，$-\frac{3\pi}{4}$相对应的点；2) 近似地作出同1.5，3.5，5，6，-2，-4相对应的点。

44. 在单位圆上弧$\frac{\pi}{6}$的终点的质点，沿着圆周按照正方向作匀速运动，试问经过下列时间后质点各在第几象限：1) 2秒；2) 3秒；3) 4秒；4) 10秒。

45. 试将下列各式写成角α的一般表达式：

1) $2\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{4}$；　　2) $3\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$；

3) $4\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+k\pi$；　　4) $10°+\alpha=50°+k\cdot180°$。

§3. 三角函数值

数值单位圆(图2)上的点M_α的横坐标X称为α的余弦。

$$x=\cos\alpha \qquad (1.15)$$

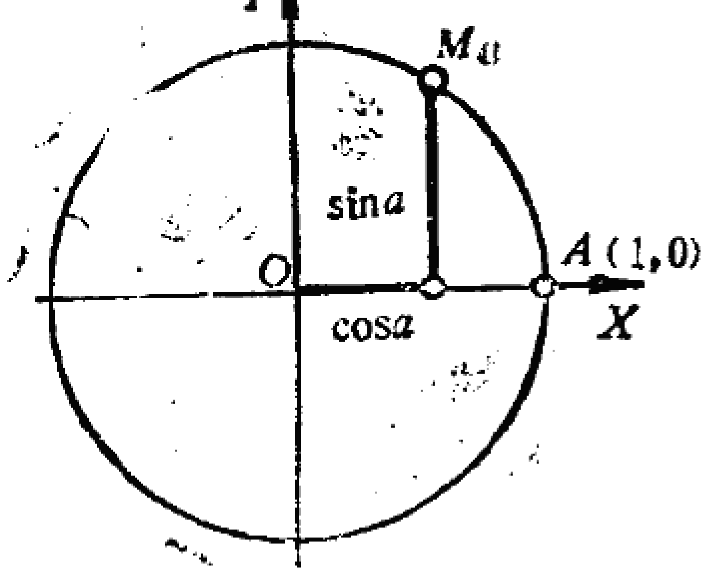


图 2

数值单位圆上的点M_α的纵坐标称为α的正弦。

$$y=\sin\alpha \qquad (1.16)$$

正弦和余弦的定义域为整个实数集，即

$D(\sin\alpha)=R$，

$D(\cos\alpha)=R$。

数α的正弦和它的余弦的比称为α的正切。

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{1.17}$$

正切的定义域为除$k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$外的所有实数的集合。

数α的余弦和它的正弦的比称为α的余切。

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{1.18}$$

余切的定义域为除$k\pi$（$k\in Z$）外的所有实数的集合。

数α的余弦的倒数称为α的正割。

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \tag{1.19}$$

正割的定义域为除$k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$外的所有实数的集合。

数α的正弦的倒数称为α的余割。

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \tag{1.20}$$

余割的定义域为除$k\pi$（$k\in Z$）外的所有实数的集合。

在解题时，三角函数被看作是实数集合中数的函数或弧（角）的集合中弧（角）的函数。同时，每一个实数或每一个弧（角）对应于三角函数的唯一值。

由于$E(\cos\alpha)=[-1,1]$，$E(\sin\alpha)=[-1,1]$，则函数$\cos\alpha$和$\sin\alpha$为有界函数。

由于正切和余切，可取任何实数值，则函数$\operatorname{tg}\alpha$和$\operatorname{ctg}\alpha$是无界函数，即$E(\operatorname{tg}\alpha)=R$，$E(\operatorname{ctg}\alpha)=R$。

46．求下列函数的定义域：

1）$y=\sin 3x$； 2）$y=\cos\frac{x}{3}$； 3）$y=\frac{1}{\sin x}$；

4）$y=\frac{1}{1-\cos x}$； 5）$y=\operatorname{tg}4x$； 6）$y=\frac{1}{\operatorname{ctg}x}$。

解：1），2）这里x可取任何实数；

3）$\sin x\neq 0$，$x\neq k\pi$，$k\in Z$；

4）$1-\cos x\neq 0$，$\cos x\neq 1$，$x\neq 2k\pi$，$k\in Z$；

5）$4x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$，$k\in Z$；

6）$\operatorname{ctg}x\neq 0$，$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，此外还有$x\neq k\pi$，因此，$x\neq\frac{\pi}{2}k$，$k\in Z$。

47．求下列函数的定义域：

1）$y=\frac{1}{\sin x^2}$； 2）$y=\frac{1}{1-\sin x}$； 3）$y=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$；

4）$y=\operatorname{ctg}3x$； 5）$y=\frac{x}{\sin x}$； 6）$y=\frac{1+\sin x}{\cos x}$。

48．自变量为何值时下列函数取得最大值和最小值：

1）$y=\sin x$； 2）$y=\cos\frac{x}{3}$； 3）$y=2\sin 3x$； 4）$y=\frac{1}{2}\cos 2x$？

解：1）我们求在函数$y=\sin 3x$取得最大值时自变量的值：$\sin 3x=1$，$3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$。类似地求得已知函数取最小值时$x$的值：$\sin 3x=-1$，$3x=$

$2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{2}{3}k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$。

2）函数的最大值：$\cos\frac{x}{3}=1$，$\frac{x}{3}=2k\pi, x=6k\pi, k\in Z$。

函数取最小值：$\cos\frac{x}{3}=-1$，$\frac{x}{3}=(2k+1)\pi$，$x=3\pi(2k+1)$，$k\in Z$。

3）我们有$\sin 3x=1$，$3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$。亦即，当$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi$，$k\in Z$时函数取最大值2。类似地，$\sin 3x=-1$，$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，即当$x=\frac{2}{3}k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$时，函数取最小值$-2$。

4）我们有$\cos 2x=1$，$2x=2k\pi$，即当$x=k\pi, k\in Z$时函数有最大值$\frac{1}{2}$。类似地，$\cos 2x=-1$，$2x=(2k+1)\pi$，即在$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$时，已知函数有最小值$-\frac{1}{2}$。

49．自变量取何值时下列函数具有最大值和最小值：

1）$y=\sin(x-1)$；2）$y=\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$；

3）$y=3\sin 4x$；　　4）$y=\frac{1}{2}\cos 5x$？

50．自变量取何值时下列函数值为零：

1）$y=\sin 2x$；　2）$y=\cos 3x$；

3）$y=\mathrm{tg}\frac{x}{3}$；　4）$y=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$？

解：1） $\sin 2x=0$，$2x=2k\pi$，$x=\frac{\pi}{2}\cdot k$，$k\in Z$；

2） $\cos 3x=0$，$3x=\frac{\pi}{2}+\pi k$，$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$，$k\in Z$；

3） $\operatorname{tg}\frac{x}{3}=0$，$\frac{x}{3}=k\pi$，$x=3k\pi$，$k\in Z$；

4） $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$，$\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in Z$。

51．自变量为何值时下列函数值为零：

1） $y=\sin\frac{x}{2}$；　　2） $y=\cos\frac{x}{3}$；

3） $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$；　　4） $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$？

52．求下列函数的定义域：

1） $y=\sin x+\cos x$；　　2） $y=\frac{2+\cos x}{\sin x}$；

3） $y=\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x$；　　4） $y=\cos x+\operatorname{ctg}x$；

5） $y=\frac{1}{\cos x}$；　　6） $y=\frac{1}{\sin x}$；

7） $y=\frac{1}{\sin x+\cos x}$；　　8） $y=\frac{1}{\operatorname{tg}3x}$；

9） $y=\frac{1}{\sin^2 x-\sin x}$；　　10） $y=\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin x-\cos x}$。

53．求出下列函数值的集合：

1） $y=\sin|x|$；　　2） $y=|\sin x|$；

3） $y=\cos|x|$；　　4） $y=|\cos x|$。

54．求下列函数的值域：

1）$y=1-\sin x$；　2）$y=3+\sin x$；

3）$y=2-\cos x$；　4）$y=5+\cos x$。

55．下列函数有最大值和最小值吗？

1）$\operatorname{tg} x$；　2）$|\operatorname{tg} x|$；　3）$\operatorname{tg}^2 x$。

56．求出下列函数的最大值和最小值：

1）$y=4+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$；　2）$y=6-\sin^2 x$；

3）$y=(n-n)\sin^2 x+n$，　$0<m<n$；

4）$y=5-3|\sin x|$。

§4．三角函数值的符号和三角函数的奇偶性

三角函数的奇偶性可用下列公式表示。

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \tag{1.21}$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha, \tag{1.22}$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \tag{1.23}$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha。 \tag{1.24}$$

三角函数在各象限内的符号见表Ⅲ：

一些特殊角（弧）的三角函数值见21页表Ⅳ。

57．下列表达式具有怎样的符号：

1）$\cos 150°$；2）$\sin 320°$；3）$\operatorname{tg} 220°$；4）$\operatorname{ctg} 400°$？

解：1）$90°<150°<180°$（第II象限）；$\cos 150°<0$；

2）$270°<320°<360°$（第Ⅳ象限）；$\sin 320°<0$；

3）$180°<220°<270°$（第Ⅲ象限）；$\operatorname{tg} 220°>0$；

4）$360°<400°<360°+90°$（第Ⅰ象限）；$\operatorname{ctg} 400°>0$。

表Ⅱ

象限 \ 函数	Ⅰ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	Ⅱ $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	Ⅲ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	Ⅳ $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\mathrm{tg}\,\alpha$	+	−	+	−
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	+	−	+	−

58．下列表达式各有怎样的符号：

1) $\sin 170°$； 2) $\cos 300°$； 3) $\mathrm{tg}\,160°$；

4) $\mathrm{ctg}\,315°$； 5) $\mathrm{tg}\,450°$； 6) $\sin 400°$；

7) $\sin\frac{7\pi}{3}$； 8) $\cos\frac{4\pi}{3}$； 9) $\sin\frac{5\pi}{4}$；

10) $\cos\frac{7\pi}{5}$； 11) $\mathrm{tg}\frac{8\pi}{3}$； 12) $\mathrm{ctg}\frac{9\pi}{4}$。

59．利用单位圆确定下列差的符号：

1) $\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{3\pi}{4}$； 2) $\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{3\pi}{4}$；

3) $\mathrm{tg}\frac{2\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{3\pi}{4}$； 4) $\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{3}-\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{4}$。

解：1) 把弧$\frac{3\pi}{2}$和$\frac{3\pi}{4}$的终点的纵坐标相比较，求得

$\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{3\pi}{4}>0$（图3）。

2) 将弧$\frac{2\pi}{3}$和$\frac{3\pi}{4}$的终点的横坐标相比较，得到$\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{3\pi}{4}>0$。

3) 比较在正切轴（过点A平行于Y轴的直线）上的点的纵坐标，有$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}<0$。

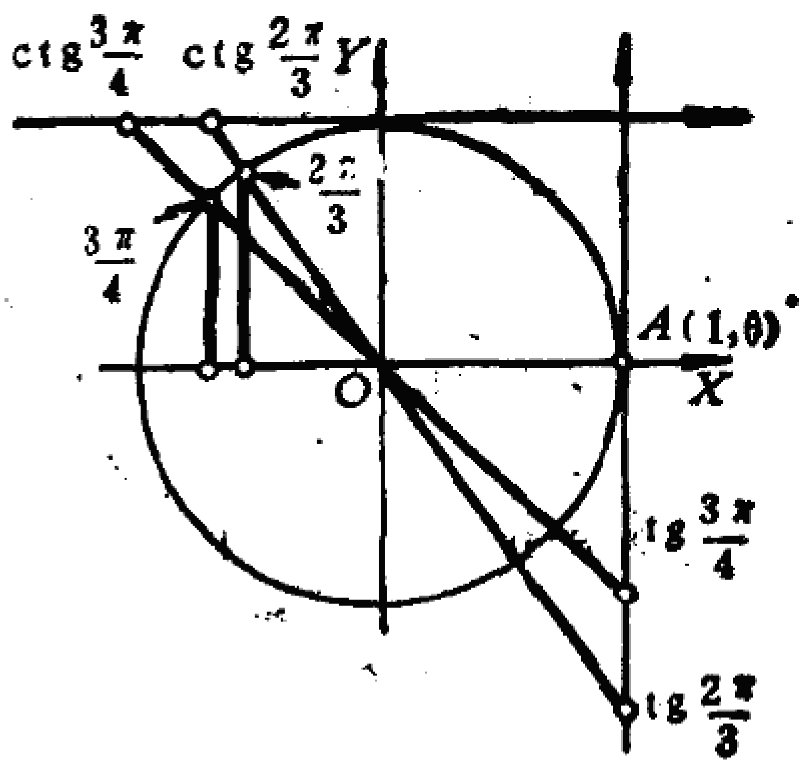


图 3

4) 比较余切轴（过单位圆与Y轴正向交点而平行于X轴的直线）上的点的横坐标，得$\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}>0$。

60．利用单位圆确定下列差的符号：

1) $\sin 130°-\sin 140°$；　2) $\cos 50°-\cos 70°$；

3) $\operatorname{tg}220°-\operatorname{tg}210°$；　4) $\operatorname{ctg}220°-\operatorname{ctg}210°$；

5) $\sin 50°-\operatorname{tg}50°$；　6) $\cos 50°-\operatorname{ctg}50°$；

7) $\operatorname{ctg}300°-\operatorname{ctg}315°$；　8) $\sin 70°-\cos 70°$。

61．利用单位圆确定下列乘积的符号：

1) $\sin 100°\cdot\sin 120°$；　2) $\cos 210°\cdot\sin 210°$；

3) $\cos 200°\cdot\sin 110°$；　4) $\operatorname{tg}140°\cdot\operatorname{tg}220°$；

5) $\cos 315°\cdot\operatorname{tg}215°$；　6) $\sin 150°\cdot\cos 150°\cdot\operatorname{tg}150°$；

7) $\sin 320°\cdot\cos 125°\cdot\operatorname{tg}250°$；　8) $\sin 230°\cdot\operatorname{tg}160°\cdot\operatorname{ctg}340°$。

62．化简：

1) $\sin^2(-\alpha)-\cos(-\alpha)+\operatorname{tg}(-\alpha)$；

2) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(-\pi)+\text{tg}(-2\pi)$。

解：利用公式（1.21），（1.22）和（1.23），得：

1) $\sin^2(-\alpha)-\cos(-\alpha)+\text{tg}(-\alpha)$

$=(-\sin\alpha)^2-\cos\alpha-\text{tg}\alpha$

$=\sin^2\alpha-\cos\alpha-\text{tg}\alpha$。

2) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(-\pi)+\text{tg}(-2\pi)$

$=-\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\pi-\text{tg}2\pi=1+(-1)-0=0$。

63．计算：

1) $\cos(-\pi)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$；

2) $2\cos(-\pi)\cdot\cos(-2\pi)\cdot\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$；

3) $\sin(-\pi)+\cos(-\pi)+\text{tg}(-\pi)$。

64．指出下列各式中的弧α

1) $|\text{tg}(-\alpha)|=-\text{tg}\alpha$；2) $|\text{ctg}(-\alpha)|=-\text{ctg}\alpha$；

3) $\sin(-\alpha)>0$。

解：1) $|\text{tg}(-\alpha)|=-\text{tg}\alpha$；$-\text{tg}\alpha\geqslant 0$，$\text{tg}\alpha\leqslant 0$；弧$\alpha$在第II或第IV象限。

2) $|\text{ctg}(-\alpha)|=-\text{ctg}\alpha$；$-\text{ctg}\alpha\geqslant 0$，$\text{ctg}\alpha\leqslant 0$；弧$\alpha$在第II或第IV象限。

3) $\sin(-\alpha)>0$；$-\sin\alpha>0$，$\sin\alpha<0$；弧α在第III或IV象限。

65．指出下列各式中的弧α可能在第几象限：

1) $\text{tg}(-\alpha)>0$；　2) $|\sin(-\alpha)|=-\sin\alpha$；

表IV

	第 I 象限					第 II 象限				第 III 象限				第 IV 象限			
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	不存在

3) $|\cos(-\alpha)| = \cos\alpha$;　　4) $\sin(-\alpha) < 0$。

66. 计算：

$$\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{3} + \sin\pi + 4\cos\frac{3\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{3}。$$

解：我们求得

$$\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{3} + \sin\pi + 4\cos\frac{3\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= (\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + 4\times 0 - 2\cdot\frac{1}{2} = 2。$$

67. 计算：

1) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} + \mathrm{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\pi$;

2) $\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2} + \cos\pi - \mathrm{tg}0 + \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin 180° + \sin 270° - \mathrm{ctg}90° + \mathrm{tg}180° - \cos 90°$;

4) $4\sin\pi\cdot\cos 2\pi + 5\mathrm{tg}\pi - \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2}$;

5) $2\sin 2\pi + 5\cos\frac{3\pi}{2} + 3\mathrm{tg}\pi - 2\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}$;

6) $\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\cos\pi\cdot\cos 0$;

7) $2\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{4} - 3\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}$;

8) $\sin^2\frac{\pi}{4} - 2\cos^2\frac{\pi}{3} - 5\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}$;

9) $\dfrac{5+\operatorname{ctg}^4\dfrac{\pi}{6}-\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}-4\cos^2\dfrac{\pi}{3}-8\sin^3\dfrac{\pi}{6}}$;

10) $4\sin^2\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+9\operatorname{tg}^2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-4\cos^2\left(-\dfrac{\pi}{3}\right).$

$+16\operatorname{ctg}^2\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

11) $\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi}{4}}{\sin^2\dfrac{\pi}{6}}+\dfrac{\cos^2\dfrac{\pi}{6}}{\sin^2\dfrac{\pi}{4}}$;

12) $\dfrac{1}{\cos 2\pi}-\dfrac{1}{\sin\dfrac{3\pi}{2}}-\sin\pi\cdot\cos^2\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

13) $\dfrac{\left(a\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\right)^2-\left(b\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{2a^2\sin\dfrac{\pi}{6}+2a^2\cos 0+\left(b\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}\right)^2}$;

14) $\dfrac{\left(2a\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^3-\left(b\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\right)^3-\left(2ab\cos\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{(a\cos 0)^2+2ab\cos\dfrac{\pi}{3}+2b^2\cos^2\dfrac{\pi}{4}}$;

15) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$-\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

16) $\cos^3\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}^3\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin^3\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

68. 1) $f(x)=4\sin 3x+5\cos 3x-2\sin x$；计算$f(0)$；

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$；$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$；$f(\pi)$；

2) $f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$；计算$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$；

3) $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+2\cos(\pi+2x)$

$+3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$；计算$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$；

4) $\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$；当$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{6}$时，计算函数的值。

69．如果$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，确定下列表达式的符号：

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$；2) $\cos(1.5+\alpha)$；3) $\sin(\pi+\alpha)$；

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$；5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$；6) $\sin(3+\alpha)$；

7) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$；8) $\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$；9) $\sin(2\pi-\alpha)$；

10) $\cos(2\pi+\alpha)$；11) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$；12) $\operatorname{tg}(1.57-\alpha)$。

70．确定下列表达式的符号：

1) $\sin\frac{7\pi}{6}\cdot\cos\frac{3\pi}{5}$；2) $\sin^2\frac{4\pi}{3}\cdot\sin\frac{5\pi}{4}$；

3) $\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$；

4) $\sin 2\cdot 3\cdot\cos(-1.7)\cdot\sin(-1.5)$。

71．下列各式中的弧α属于第几象限：

1）$\sin\alpha=\cos\alpha$；　2）$\sin\alpha=\cos^2\alpha$；　3）$\sin\alpha=\cos^3\alpha$；

4）$\sin\alpha=\cos^4\alpha$；　5）$\cos\alpha=\sin^2\alpha$；　6）$\cos\alpha=\sin^3\alpha$；

7）$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$；　8）$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha$。

72．如果$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，确定下列表达式的符号：

1）$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$；

2）$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$；

3）$\cos^2(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}^3(\pi-\alpha)$。

73．计算：

1）$\sin\pi+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}\pi$；

2）$\cos(-\pi)+\sin(-\pi)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$；

3）$a^2\cos 0+2ab\cos\pi+b^2\sin\frac{\pi}{2}$；

4）$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$；

5）$5\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}-8\sin^2\frac{\pi}{6}+4\cos^2\frac{\pi}{3}$；

6）$\sin^2\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}-\cos\pi+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$

$-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$；

7) $\sin^3\frac{\pi}{6}-\cos^3\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}^3\frac{\pi}{4}-\cos^3\frac{\pi}{3}$；

8) $\sin^2\frac{\pi}{4}\cdot\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$。

74．化简：

1) $\dfrac{(a\cos 0)^2-\left(b\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^2}{2a^2\cos\frac{\pi}{3}+2ab\cos\pi+b^2\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}$；

2) $\dfrac{\left(a\sin\frac{\pi}{2}\right)^4-\left(b\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)^4}{(a\cos 2\pi)^2-\left(b\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}$；

3) $\left(-a\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)^3+(ab\,\mathrm{tg}2\pi)^3+(b\cos 0)^3$；

4) $\dfrac{a\cos 0-ab\sin 0+b\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{a\cos 2\pi-b\sin 2\pi}$。

75．验证下列等式：

1) $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos\pi+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}-\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2}$

$-\sin^2\frac{\pi}{3}=2$；

2) $\sin\pi+3\cos\frac{3\pi}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{3}+\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}=0$；

3) $2\sin^2\frac{\pi}{4}+4\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}=4$；

4) $\sin^3\frac{\pi}{4}+\cos^3\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=0$;

5) $$\frac{2-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=-2;$$

6) $$2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-3\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$+4\mathrm{tg}0=2。$$

§5. 基本的三角恒等式

如果自变量相同的两个函数具有同样的定义域，并且对于自变量的所有容许值这两个函数都具有相同的值，那么，这两个函数是恒等的。

对自变量的所有容许值都成立的等式称为恒等式。

如果在恒等式中含有三角函数，那么这样的恒等式称为三角恒等式。

由已知函数化为与它恒等的函数所作的变换称为函数的恒等变换。

证明三角恒等式，通常采用下列方法：

1）从等式的任何一边（通常是表达式较复杂的一边）出发进行变换，使变换的结果与等式另一边的表达式相同；

2）对等式两边同时进行变换，直至得到相同的表达式为止；

3）利用比例的内项乘积等于外项乘积的性质，证明等式中这些乘积相等。

基本的三角恒等式

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \tag{1.25}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,\ \alpha\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z; \tag{1.26}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z; \tag{1.27}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq k\pi,\ k\in Z。 \tag{1.28}$$

利用基本的三角恒等式，可以用已知的三角函数表示其它的函数，这些表达式见下表：

表 V

已知函数	所求函数			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

76．已知：$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$。

计算：1）$\cos\alpha$；2）$\operatorname{tg}\alpha$；3）$\operatorname{ctg}\alpha$。

解：1）$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$（在第II象限$\cos\alpha<0$，因此，根号前取负号）；

$$2)\ \mathrm{tg}\alpha=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4};\quad 3)\ \mathrm{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}.$$

77．已知：$\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，$\alpha\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$。

计算：1）$\sin\alpha$；2）$\mathrm{tg}\alpha$；3）$\mathrm{ctg}\alpha$。

解：1）$\sin\alpha=-\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$；

$$2)\ \mathrm{tg}\alpha=\frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=\frac{5}{12};\quad 3)\ \mathrm{ctg}\alpha=\frac{12}{5}.$$

78．已知：$\mathrm{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$。

计算：1）$\mathrm{ctg}\alpha$；2）$\cos\alpha$；3）$\sin\alpha$。

解：1）$\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$；

2）根据公式（1.27），得：$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$，

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}}=-\frac{4}{5};$$

3）$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$。

79．已知：$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{8}{15}$，$\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$。

计算：1）$\mathrm{tg}\alpha$；2）$\sin\alpha$；3）$\cos\alpha$。

解：1） $\operatorname{tg}\alpha=\frac{15}{8}$；

2）根据公式（1.28），得：$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$；

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{15}\right)^2}}=\frac{15}{17}；$$

3） $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}$。

80．已知下列三角函数，分别计算它们其余的三个三角函数值：

1） $\sin\alpha=-\frac{5}{13},\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$；

2） $\cos\alpha=-\frac{8}{17},\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$；

3） $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15},\alpha\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$；

4） $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{7}{24},\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$。

81．化简下列各式：

1） $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha$；2） $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$。

解：1） $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$=\frac{\cos^2\alpha+\sin\alpha+\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right);$$

2) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1$。

82．化简下列各式：

1) $\sin^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha+\cos^2\alpha$；　2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$；

3) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}+\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha}{1-\mathrm{ctg}^2\alpha}$；　4) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$；

5) $\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$；　6) $\cos^4x+\sin^2x\cos^2x+\sin^2x$；

7) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$；　8) $\sin\alpha\cos\alpha(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)$。

83．证明恒等式：

1) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$；

2) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\mathrm{tg}\alpha=(1+\cos\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha)$；

3) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$。

证明：1) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1+1+2\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\right),\ \alpha\neq k\pi,\ k\in Z。$$

2) 变换原式左边，有：

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha+\mathrm{tg}\alpha=1+\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos\alpha\ (\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha},$$

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z。$$

变换原式右边，有：

$$(1+\cos\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha)=(1+\cos\alpha)\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(1+\cos\alpha)\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)\ (1+\cos\alpha)}{\cos\alpha},\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z.$$

由于左右两边相等，因而原恒等式得证。

3）根据比例的基本性质，得：

$(\sin^2\alpha=(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha))\Longleftrightarrow(\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha)\Longleftrightarrow(\sin^2\alpha=\sin^2\alpha)$，$\alpha\neq k\pi$，$k\in Z$。

84．证明恒等式：

1）$\dfrac{\sin^2x}{\sin x-\cos x}+\dfrac{\sin x+\cos x}{1-\mathrm{tg}^2x}=\sin x+\cos x$；

2）$\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$；

3）$\sin^3\alpha\ (1+\mathrm{ctg}\alpha)\ +\cos^3\alpha\ (1+\mathrm{tg}\alpha)\ =\sin\alpha+\cos\alpha$；

4）$\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=1$；

5) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$；

6) $\frac{\sin x}{1+\operatorname{ctg}x}+\frac{\cos x}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{1}{\sin x+\cos x}$；

7) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$；

8) $\frac{\sin^3 z-\cos^3 z}{1+\sin z\cos z}=\sin z-\cos z$。

85．证明恒等式：

1) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$；

2) $1-\sin^6 z-\cos^6 z=3\sin^2 z\cos^2 z$；

3) $\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$；

4) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$。

86．若$\operatorname{tg}x=2$，求函数 $y=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^3 x-\cos^3 x}$的值。

解：由于分子和分母是关于$\sin x$和$\cos x$的齐次多项式，那么用$\cos^3 x$除这个函数的分子和分母就得：

$$y=\frac{\operatorname{tg}^3 x+1}{\operatorname{tg}^3 x-1}=\frac{2^3+1}{2^3-1}=\frac{9}{7}。$$

87．若$\operatorname{tg}x=3$，求函数$y=\frac{\sin^2 x+\sin x\cos x+2}{3\sin x\cos x+\cos^2 x-4}$。

解：把分子里的数2和分母里的数4分别乘以三角单位$(\sin^2 x+\cos^2 x)$，然后用$\cos^2 x$分别除分子和分母的各项，得：

$$y=\frac{\sin^2 x+\sin x\cos x+2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{3\sin x\cos x+\cos^2 x-4(\sin^2 x+\cos^2 x)}$$

$$=\frac{3\sin^2x+\sin x\cos x+2\cos^2x}{3\sin x\cos x-4\sin^2x-3\cos^2x}$$

$$=\frac{3\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}x+2}{3\mathrm{tg}x-4\mathrm{tg}^2x-3}=\frac{3\times3^2+3+2}{3\times3-4\times3^2-3}=-\frac{16}{15};$$

88．计算：

1) $y=\dfrac{\sin^2x-3\cos^2x}{2\sin^2x+\cos^2x}$，已知$\mathrm{tg}x=3$；

2) $y=\dfrac{3\sin^2x+2\cos^2x-1}{\sin^2x-\sin x\cos x+2}$，已知$\mathrm{tg}x=1$。

89．化简下列各式：

1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$；

2) $\sin^2\alpha+\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$；

3) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$；

4) $\mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha\ \mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$；

5) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$，

6) $(1+\sin\alpha)(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha)$；

7) $(1+\mathrm{tg}\alpha)^2+(1-\mathrm{tg}\alpha)^2$；

8) $\mathrm{tg}\alpha-\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$。

90．证明恒等式：

1) $(\mathrm{ctg}\alpha+1)^2+(\mathrm{ctg}\alpha-1)^2=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}$；

2) $\cos\alpha+\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha-\dfrac{1}{\cos\alpha}=0$；

3) $\mathrm{tg}^2\alpha\ (1+\mathrm{tg}^2\alpha)(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)-(1-\mathrm{tg}^2\alpha)^2=4\mathrm{tg}^2\alpha$；

4) $\cos\alpha\ (\sin\alpha+\cos\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha)=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$；

5) $\frac{\cos\alpha}{\text{tg}\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\text{ctg}\alpha}=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha-1)$；

6) $2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\ (\text{tg}^2\alpha+\text{ctg}^2\alpha)+(\text{tg}\alpha-\text{ctg}\alpha)+1$

$=\text{tg}^2\alpha$；

7) $(1+2\sin\alpha\cos\alpha)(\text{tg}\alpha-1)=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\text{tg}\alpha+1)$；

8) $(\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=\text{tg}\alpha$；

9) $2(\cos^6\alpha+\sin^6\alpha)-3(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)=-1$；

10) $\frac{\text{tg}^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=(1+\text{tg}^2\alpha)^2$；

11) $\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\text{ctg}^2\alpha\,\text{ctg}^2\beta$；

12) $\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha=1$。

91．当$\text{tg}z=2$时，计算下列表达式：

1) $\sin^4 z+\cos^4 z$；　　2) $\sin^6 z+\cos^6 z$；

3) $\frac{\sin^4 z-\cos^4 z}{\sin^6 z-\cos^6 z}$；　　4) $\frac{\sin^3 z-2\cos^3 z+3\cos z}{3\sin z+2\cos z}$。

92．已知：$\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha=3$，求：

1) $\text{tg}\alpha-\text{ctg}\alpha$；　　2) $\text{tg}^2\alpha-\text{ctg}^2\alpha$；

3) $\text{tg}^2\alpha+\text{ctg}^2\alpha$；　　4) $\text{tg}^3\alpha+\text{ctg}^3\alpha$。

小 测 验

第一组

1) 计算：

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{2}\cdot\text{tg}\frac{\pi}{3}}{\text{ctg}\frac{\pi}{6}-\text{ctg}\frac{\pi}{2}}$$

第二组

1) 计算：

$$\frac{2\text{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\left(\text{tg}\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\pi-2\sin\frac{3\pi}{2}}$$

2）确定下面的表达式的符号：

$$\frac{\cos 100^\circ \operatorname{tg} 250^\circ}{\sin 300^\circ \operatorname{ctg} 100^\circ}$$

3）求出函数 $y=\frac{\operatorname{tg} 2x}{\cos x}$ 的定义域。

4）已知 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，计算角$\alpha$其余的三角函数的值。

5）证明恒等式并指出角α的容许值：

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=1$$

2）确定下面的表达式的符号。

$$\frac{\operatorname{tg} 150^\circ \sin 200^\circ}{\cos 320^\circ \operatorname{ctg} 140^\circ}$$

3）求出函数 $y=\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin\frac{x}{3}}$ 的定义域。

4）已知 $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$，$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，计算角$\alpha$其余的三角函数的值。

5）证明恒等式并指出角α的容许值：

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-1$$

§6. 三角函数的周期性

对于函数f来说，如果存在$\lambda\neq 0$对于函数定义域内任何的数α，数$\alpha-\lambda$和$\alpha+\lambda$也同样属于这个定义域，并且满足等式

$$f(\alpha-\lambda)=f(\alpha)=f(\alpha+\lambda),$$

则函数f称为周期函数。这时，数λ称为函数f的周期；形式为$n\lambda$（$n\in Z$，$n\neq 0$）的数也是它的周期。

正弦和余弦最小的正周期等于2π，而正切和余切最小的正周期等于π。

三角函数周期性的性质可用下列恒等式表示：

$$\sin\alpha=\sin(2k\pi+\alpha),\quad k\in Z; \tag{1.29}$$

$$\cos\alpha = \cos(2k\pi+\alpha),\ k\in Z; \tag{1.30}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(k\pi+\alpha),\ k\in Z; \tag{1.31}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(k\pi+\alpha),\ k\in Z; \tag{1.32}$$

93. 计算：

1） $\cos 3660°$；　　2） $2\cos 4.5\pi + \sin\frac{19\pi}{3}$；

3） $\sin(-300°) - \operatorname{tg}(-150°)$ 。

解：根据正弦和余弦的周期性，得

1） $\cos 3660° = \cos(360°\times 10 + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$；

2） $2\cos 4.5\pi + \sin\frac{19\pi}{3} = 2\cos(2\pi\cdot 2 + 0.5\pi)$

$+\sin\left(2\pi\cdot 3 + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos 0.5\pi + \sin\frac{\pi}{3} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$；

3） 把每个自变量都加上各自函数的一个周期，得

$\sin(-300°) - \operatorname{tg}(-150°)$

$= \sin(-300° + 360°) - \operatorname{tg}(-150° + 180°)$

$= \sin 60° - \operatorname{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$。

94. 计算：1） $\cos 7230°$；2） $\sin 900°$；3） $\operatorname{tg}585°$；4） $\operatorname{ctg}750°$；5） $\sin 1843°$。

95. 计算：

1） $\sin 6.2\pi + \cos 4.1\pi$；　　2） $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{21\pi}{4}$；

3） $\sin\frac{19\pi}{3} - \cos\frac{19\pi}{3}$；4） $\sin(82\pi - 0.192)$

$+\cos(22\pi+1.501)$；5）$\sin 7.854\ \mathrm{tg} 3.927$。

96．求下列函数的周期：

1）$y=\sin 3x$；　2）$y=\cos\frac{x}{2}$。

解：1）用 λ 表示所求的周期，得

$$\sin 3(x+\lambda)=\sin 3x，或\sin(3x+3\lambda)=\sin 3x。$$

由此推出$3\lambda=2\pi$，即 $\lambda=\frac{2\pi}{3}$。

2）类似地有：

$$\cos\left(\frac{x+\lambda}{2}\right)=\cos\frac{x}{2}，或\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{x}{2}。由此得\frac{\lambda}{2}=2\pi，即\lambda=4\pi。$$

97．求下列函数的周期：

1）$y=\cos 5x$；　2）$y=\cos\frac{x}{4}$；

3）$y=\mathrm{tg} 2x$；　4）$y=\mathrm{ctg}\frac{x}{5}$。

98．求下列函数的周期：

1）$y=\sin 2x+\cos 3x$；　2）$y=\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{2x}{3}$。

解：1）求出每一项的基本周期：

$\sin 2(x+\lambda_1)=\sin 2x$，$\sin(2x+2\lambda_1)=\sin 2x$，

$2\lambda_1=2\pi$，$\lambda_1=\pi$；

$\cos 3(x+\lambda_2)=\cos 3x$，$\cos(3x+3\lambda_2)=\cos 3x$，

$3\lambda_2=2\pi$，$\lambda_2=\frac{2\pi}{3}$。

每个周期的倍数仍是该函数的周期，因此，周期λ_1和 λ_2的公倍数是函数y的周期，周期λ_1和λ_2的最小公倍数，即π和

$\frac{2\pi}{3}$的最小公倍数，为2π。

2）我们有：

$$\sin\frac{3(x+\lambda_1)}{2}=\sin\frac{3\pi}{2}，\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{3\lambda_1}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{3x}{2}，\frac{3\lambda_1}{2}=2\pi，\lambda_1=\frac{4\pi}{3}；$$

$$\sin\frac{2(x+\lambda_2)}{3}=\sin\frac{2x}{3}，\sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{2\lambda_2}{3}\right)$$

$$=\sin\frac{2x}{3}，\frac{2\lambda_2}{3}=2\pi，\lambda_2=3\pi。$$

周期λ_1和λ_2的最小公倍数等于12π，因此，函数的周期等于12π。

99．求下列函数的周期：

1）$y=\sin5x-\cos4x+1$；　2）$y=2\sin\frac{x}{4}-3\sin\frac{x}{3}$；

3）$y=\mathrm{tg}\frac{2x}{3}-4\mathrm{ctg}\frac{3x}{2}-2$；

4）$y=\sin\frac{3x}{4}-3\cos\frac{5x}{8}+\cos5x$。

100．计算：

1）$2\sin750°-3\cos900°+\mathrm{tg}405°$；

2）$\mathrm{tg}^2600°+\mathrm{ctg}^2585°+3$；

3）$\sin(-330°)+\sin(-690°)$；4）$\mathrm{tg}(-135°)-\mathrm{tg}225°$；

5）$\cos(-3\pi)-\sin(-7\pi)$；

6) $\dfrac{\sin\left(-\dfrac{11\pi}{2}\right)+\text{tg}(-5\pi)}{\cos(-5\pi)+\text{ctg}\left(-\dfrac{21\pi}{4}\right)}$;

7) $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)\cos 8\pi$。

101．求下列函数的周期：

1) $y=\sin\dfrac{\pi x}{3}-\cos\dfrac{\pi x}{2}$；2) $y=2\text{tg}2\pi x+3\text{ctg}\dfrac{4\pi x}{3}$；

3) $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；4) $y=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$；

5) $y=\dfrac{\sin 4x-\cos 3x}{2\sin 4x+\cos 3x}$；6) $y=3^{\cos x}$；

7) $y=5^{\sin x}$；8) $y=\dfrac{5}{\text{tg}x+3}$。

102．化简：

1) $\sin^2(6\pi-\alpha)+\sin^2(10\pi+\alpha)$；

2) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-4\pi\right)+\cos^2\left(8\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$；

3) $\cos(\alpha-6\pi)+\cos(12\pi+\alpha)$；

4) $\sin^2(2\pi+\alpha)+\cos^2(6\pi-\alpha)+1$。

103．证明下列恒等式并指出它们的定义域：

1) $\dfrac{\cos^2(4\pi-\alpha)}{\text{tg}^2(9\pi+\alpha)}=\cos^4\alpha$；

2) $\dfrac{\cos(6\pi+\alpha)\ \text{tg}(3\pi-\alpha)}{\sin(4\pi-\alpha)\ \text{ctg}(5\pi+\alpha)}=\text{tg}\alpha$；

3) $\dfrac{\text{ctg}(13\pi-x)+\text{tg}(4\pi+x)}{\text{tg}(5\pi+x)-\text{ctg}(7\pi+x)}=1$；

4) $\sin(6\pi - x)\cos(8\pi - x)\mathrm{tg}(9\pi - x)\mathrm{ctg}(10\pi - x)$
$= -\sin x\cos x$。

§7. 正弦和余弦的半周期的性质

正弦和余弦函数在自变量增加或减少一个π时只有符号的变化：

$$\sin\alpha = -\sin(\alpha \pm \pi), \tag{1.33}$$

$$\cos\alpha = -\cos(\alpha \pm \pi)。 \tag{1.34}$$

如果函数的自变量增加π的任意个奇数倍时，则得公式为：

$$\sin\alpha = -\sin[\alpha + (2k+1)\pi], \tag{1.35}$$

$$\cos\alpha = -\cos[\alpha + (2k+1)\pi], \tag{1.36}$$

即，正弦函数和余弦函数在自变量增加$(2k+1)\pi$时只有符号的变化。

104. 计算：1) $\sin150°$； 2) $\sin(-120°)$；
3) $\cos225°$； 4) $\cos(-240°)$； 5) $\sin330°$；
6) $\sin(-300°)$； 7) $\sin570°$； 8) $\sin(-585°)$；
9) $\cos600°$。

解：在1)—4)题中，我们利用公式(1.33)和(1.34)，并利用三角函数的奇偶性：

1) $\sin150° = -\sin(150° - 180°) = -\sin(-30°)$
$= \sin30° = \frac{1}{2}$；

2) $\sin(-120°) = -\sin(-120° + 180°) = -\sin60°$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$；

3) $\cos 225° = -\cos(225° - 180°) = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos(-240°) = -\cos(-240° + 180°) = -\cos(-60°)$

$= -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$。

在5）题中我们利用正弦函数的周期性和它是奇函数的特性。在6）题中我们利用正弦函数的周期性：

5) $\sin 330° = \sin(330° - 360°) = \sin(-30°) = -\sin 30°$

$= -\dfrac{1}{2}$;

6) $\sin(-300°) = \sin(-300° + 360°) = \sin 60°$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

在7），8）和9)题中，我们利用公式(1.35)和(1.36)：

7) $\sin 570° = -\sin(570° - 3 \times 180°) = -\sin 30° = -\dfrac{1}{2}$;

8) $\sin(-585°) = -\sin(-585° + 3 \times 180°)$

$= -\sin(-45°) = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

9) $\cos 600° = -\cos(600 - 3 \times 180°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$。

105. 计算：

1) $\sin(-225°)$; 2) $\cos(-150°)$; 3) $\cos 135°$;
4) $\cos(-135°)$; 5) $\sin 135°$; 6) $\sin 210°$;
7) $\cos 120°$; 8) $\sin 240°$; 9) $\cos 570°$;
10) $\cos(-570°)$; 11) $\sin 510°$; 12) $\sin 585°$。

106. 计算：1) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)$; 2) $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

3) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$；　4) $\sin 7\frac{1}{3}\pi$。

解：1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

$$=-\sin\left(-\frac{7\pi}{6}+\pi\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

2) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$

$$=-\frac{1}{2};$$

3) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=\sin\left(-2\frac{1}{6}\pi+2\pi\right)$

$$=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=-\frac{1}{2};$$

4) $\sin 7\frac{1}{3}\pi=-\sin\left(7\frac{1}{3}\pi-7\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

107. 计算：

1) $\sin\frac{2\pi}{3}$；　2) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$；　3) $\sin\frac{5\pi}{4}$；

4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$；　5) $\sin\frac{31\pi}{6}$；　6) $\cos\frac{5\pi}{4}$。

108. 计算：

1) $\sin 4.45$；　2) $\cos 2.86$；　3) $\cos 10.8$；

4) $\sin(-2.86)$；　5) $\sin(-4.12)$；6) $\cos 4.41$。

解：1) $\sin 4.45 = -\sin(4.45-3.14) = -\sin 1.31$
$= -\sin 75^\circ = -0.966$；

2) $\cos 2.86 = -\cos(2.86-3.14) = -\cos(-0.28)$
$= -\cos 16^\circ = 0.961$；

3) $\cos 10.8 = -\cos(10.8-3\times 3.14)$
$= -\cos(10.8-9.42) = -\cos 1.38$
$= -\cos 79^\circ = -0.191$；

4) $\sin(-2.86) = -\sin(-2.86+3.14) = -\sin 0.28$
$= -\sin 16^\circ = -0.276$；

5) $\sin(-4.12) = -\sin(-4.12+3.14)$
$= -\sin(-0.98) = \sin 0.98$
$= \sin 56^\circ = 0.829$；

6) $\cos 4.41 = -\cos(4.41-3.14) = -\cos 1.27$
$= -\cos 73^\circ = -0.292$。

109. 计算：

1) $\sin(-2.76)$；2) $\cos(-3.87)$；3) $\cos 4.33$；
4) $\sin 4.26$；　5) $\sin 2.53$；　6) $\sin 10.5$。

§8. 诱 导 公 式

诱导公式能够将角$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$，$\pi\pm\alpha$，$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$，$2\pi\pm\alpha$的三角函数用角α的三角函数表示出来。

使用诱导公式时要注意两条原则：

1. 如果α偏离X轴，则被导函数，即自变量$-\alpha$，$\pi\pm\alpha$，$2\pi\pm\alpha$的函数，名称不变；如果α偏离Y轴，则被导函数，

表VI

	自变量＼函数	sin	cos	tg	ctg
1	$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
2	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(90°-\alpha)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
3	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90°+\alpha)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
4	$\pi-\alpha$ $(180°-\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
5	$\pi+\alpha$ $(180°+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
6	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$ $(270°-\alpha)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
7	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ $(270°+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
8	$2\pi-\alpha$ $(360°-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
9	$2\pi+\alpha$ $(360°+\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$

即自变量$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$，$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$，变成同类函数的名称（正弦变余弦，正切变余切，反之亦然）；

2. 诱导公式右边的三角函数的符号就是把α看成锐角$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$时公式左边的符号。

110. 用诱导公式求$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

解：由于α在Y轴一侧，那么正切应变为余切。对于自变量α的所有允许值公式都是成立的，因而，对于$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，公式也成立。这时，弧$\frac{3\pi}{2}+\alpha$在第Ⅳ象限，其正切为负，即$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$。

111. 计算：

1) $\sin 135°$； 2) $\operatorname{ctg}150°$； 3) $\cos 70°$；

4) $\cos 240°$； 5) $\sin 310°$； 6) $\operatorname{tg}320°$。

解：1) $\sin 135°=\sin(90°+45°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

2) $\operatorname{ctg}150°=\operatorname{ctg}(90°+60°)=-\operatorname{ctg}60°=-\sqrt{3}$；

3) $\cos 70°=\cos(90°-20°)=\sin 20°=0.3420$；

4) $\cos 240°=\cos(270°-30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$；

5) $\sin 310°=\sin(270°+40°)=-\cos 40°=-0.7660$；

6) $\operatorname{tg}320°=\operatorname{tg}(270°+50°)=-\operatorname{ctg}50°=-0.8391$。

112. 计算：

1) $\cos 150°$； 2) $\operatorname{tg}135°$； 3) $\sin 120°$； 4) $\operatorname{ctg}130°$；

5) $\cos 210°$； 6) $\sin 260°$； 7) $\operatorname{tg}220°$； 8) $\operatorname{ctg}200°$；

9) $\sin 210°$； 10) $\sin 350°$； 11) $\cos 280°$； 12) $\operatorname{tg}340°$；

13) $\operatorname{ctg}325°$； 14) $\sin 345°$； 15) $\cos 295°$； 16) $\operatorname{tg}335°$。

113. 计算：

1) $\sin 225°$； 2) $\cos 150°$； 3) $\operatorname{tg}210°$； 4) $\sin 330°$；

5) $\operatorname{tg}315°$； 6) $\cos 240°$； 7) $\sin 200°$； 8) $\operatorname{ctg}140°$。

解：1) $\sin 225°=\sin(180°+45°)=-\sin 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

2) $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg}(180° + 30°) = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

4) $\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$;

5) $\operatorname{tg} 315° = \operatorname{tg}(360° - 45°) = -\operatorname{tg} 45° = -1$;

6) $\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;

7) $\sin 200° = \sin(180° + 20°) = -\sin 20° = -0.3420$;

8) $\operatorname{ctg} 140° = \operatorname{ctg}(180° - 40°) = \operatorname{ctg} 40° = -1.1918$。

114．计算：

1) $\cos 225°$；2) $\sin 150°$；3) $\operatorname{ctg} 210°$；4) $\operatorname{tg} 225°$；
5) $\cos 315°$；6) $\operatorname{tg} 120°$；7) $\operatorname{ctg} 150°$；8) $\sin 220°$；
9) $\cos 230°$；10) $\operatorname{tg} 250°$；11) $\sin 315°$；12) $\cos 340°$。

115．计算：1) $\sin 2.15$；2) $\operatorname{tg} 4.85$。

解：1) $\sin 2.15 = \sin(3.14 - 0.99) = \sin 0.99 = \sin 57°$
$= 0.84$；

2) $\operatorname{tg} 4.85 = \operatorname{tg}(4.85 - 3.14) = \operatorname{tg} 1.71 = \operatorname{tg}(1.57 + 0.14)$
$= -\operatorname{ctg} 0.14 = -\operatorname{ctg} 8° = -7.1$。

116．计算：1) $\sin 3.52$；2) $\cos 3.68$；3) $\operatorname{ctg} 5.11$。

§9．综 合 题

117．计算：

1) $\sin 9135° + \cos(-585°) + \operatorname{tg} 1395° + \operatorname{ctg}(-630°)$；

2) $\sin(-810°) + \cos(-900°) + \operatorname{tg}(-395°)\operatorname{ctg} 575°$；

3) $\sin(-2385°)-\sin(-2023°)+\cos(-485°)$
$-\cos(-125°)$;

4) $3\operatorname{tg}930°+\sin1200°-\cos1410°$;

5) $\cos510°-\sin480°+\cos840°+\sin1230°$;

6) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)+\cos\frac{17\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}$
$-\operatorname{ctg}\frac{37\pi}{4}$;

7) $\sin\left(-\frac{47\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}\frac{21\pi}{4}+\operatorname{tg}\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$
$-\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{6}$。

118. 化简：

1) $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)$
$-\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)$;

2) $$\frac{\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)+\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi+\alpha)}.$$

119. 证明恒等式：

1) $$\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-2\pi)}+\frac{\cos^2(-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=1;$$

2) $$\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$=\sin\alpha$

3) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{1-\operatorname{ctg}^2(\alpha-2\pi)}=-1$。

120. 解方程：

1) $\cos^2(\pi-x)+8\cos(\pi+x)+7=0$；

2) $2\cos^2(x-\pi)+3\sin(\pi+x)=0$；

3) $2\sin^2x+5\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)-2=0$；

4) $5\cos^2\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$；

5) $3\sin^2\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)-\cos(x+4\pi)=0$；

6) $5\operatorname{tg}^2(x-\pi)+12\operatorname{tg}(\pi-x)=0$；

7) $2\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)+3\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0$。

小 测 验

第一组

1) 化简：

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)-$

第二组

1) 化简：

$\sin(\alpha-2\pi)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$。

$-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$。

2）计算：

$\operatorname{ctg}225°-\operatorname{ctg}675°-\cos 495°+\cos 765°$。

3）证明恒等式：

$$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\times\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\sin\alpha。$$

4）解方程：

$$\sin^2(x-\pi)+6\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\times\cos(x+\pi)+8\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=0。$$

5）解方程：

$$\operatorname{ctg}^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-2=0。$$

2）计算：

$$\frac{\cos^2 336°-\cos^2 156°}{\operatorname{tg}^2 72°}\times\frac{+\operatorname{tg}100°\operatorname{tg}350°}{+\operatorname{ctg}^2 162°}-\frac{\operatorname{tg}^2 18°}{2}。$$

3）证明恒等式：

$$\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-2\pi)}+\frac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=1。$$

4）解方程：

$$\sin^2(x+\pi)-10\sin(x+\pi)\cos(x-\pi)+21\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0。$$

5）解方程：

$$\operatorname{ctg}^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-4\operatorname{tg}(x-\pi)+3=0。$$

第二章　反三角函数与三角方程

§1. 反三角函数，按照已知三角函数值作弧（角）

函数$y=\sin x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$内可逆，即具有反函数，这个反函数叫做反正弦函数，用$y=\arcsin x$表示：

$D(\arcsin x)=[-1,1]$,

$E(\arcsin x)=\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$\sin(\arcsin x)=x$,

这里$x\in[-1,\ 1]$；$\arcsin(-x)=-\arcsin x$

函数$y=\cos x$在区间$[0,\pi]$内可逆，即具有反函数，这个反函数叫做反余弦函数，用$\arccos x$表示：

$D(\arccos x)=[-1,\ 1]$，$E(\arccos x)=[0,\ \pi]$；

$\cos(\arccos x)=x$，这里$x\in[-1,\ 1]$；$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$。

函数$y=\mathrm{tg}x$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内可逆，即具有反函数，这个反函数叫做反正切函数，用$y=\mathrm{arctg}x$表示：

$D(\mathrm{arctg}x)=R$，$E(\mathrm{arctg}x)=\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$；

$\text{tg}(\text{arctg}x)=x$，这里$x\in R$；$\text{arctg}(-x)=-\text{arctg}x$.

函数$y=\text{ctg}x$在区间（0，π）内可逆，即具有反函数，这个反函数叫做反余切函数，用$y=\text{arcctg}x$表示；

$$D(\text{arc ctg}x)=R,\ E(\text{arcctg}x)=(0,\ \pi);$$

$\text{ctg}(\text{arc ctg}x)=x$，这里$x\in R$；$\text{arcctg}(-x)=\pi-\text{arcctg}x$.

1. 求出正弦等于a的弧α的集合。

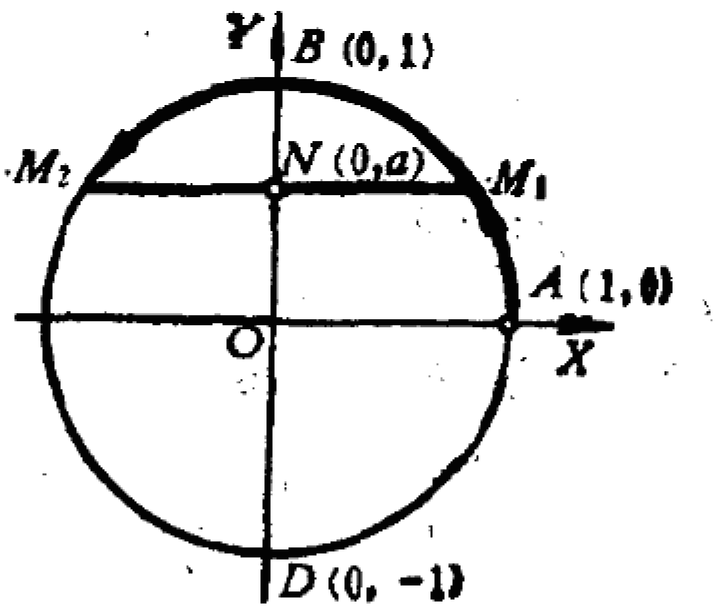


图 4

解：在单位圆的Y轴上取一点N（$0,a$），并通过这点作平行于X轴的直线，我们分两种情况来研究。

第一种情况，设$|a|<1$，则直线$y=a$和单位圆相交于M_1和M_2两点，这两点关于Y轴为对称（图 4），弧$\overset{\frown}{AM_1}=\arcsin a$与点$M_1$相对应，而弧$\pi-\arcsin a$与点$M_2$相对应。这两个弧的正弦都等于$a$。以点$M_1$为终点，且正弦值等于$a$的弧的集合可用下面的公式表示：

$$\alpha=\arcsin a+2k\pi\ (k\in Z),$$

而终点为M_2且正弦值等于a的弧的集合可表示为：

$$\alpha=\pi-\arcsin a+2k\pi，或者$$

$$\alpha=-\arcsin a+(2k+1)\pi(k\in Z)。$$

由于当$n=2k$时（即n为偶数），$(-1)^n=1$；当$n=2k+1$时（即n为奇数），$(-1)^n=-1$，那么这两个公式可

合并为一个公式：

$$\alpha = (-1)^n \arcsin a + n\pi \quad (n \in Z)。$$

第二种情况：设$a=\pm 1$，如果$a=1$，则点N $(0,a)$ 与点B $(0,1)$ 重合；如果$a=-1$，则点N $(0,a)$ 与点D $(0,-1)$ 重合（图4）。当终点为B $(0,1)$ 时（在$a=1$时）弧的集合可用下式求示：

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in Z),$$

而当终点为D $(0,-1)$ 时（在$a=-1$时）弧的集合可用下式表示：

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in Z)。$$

在正弦等于a（$|a| \leqslant 1$）的所有的弧（角）中，区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$内绝对值最小的弧 $\arcsin a$ 叫做反正弦函数的主弧。

2. 写出正弦等于下列数值的主弧：1)0；2)-1；3) 1；4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$；5) $-\frac{1}{2}$。

解：1) $\alpha = \arcsin 0 = 0$；

2) $\alpha = \arcsin(-1) = -\arcsin 1 = -\frac{\pi}{2}$；

3) $\alpha = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$；

4) $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$；

5) $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$

3. 写出正弦等于下列数值的主弧：

1) $\frac{1}{2}$；2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$；4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$；5) $\frac{3}{4}$。

4. 作出弧$\arcsin\frac{2}{5}$和$\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$的主弧：

解：图5作法满足条件：

$\overset{\frown}{AM_1} = \arcsin\frac{2}{5}$，

$\overset{\frown}{AM_2} = \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$

$= -\arcsin\frac{2}{5}$。

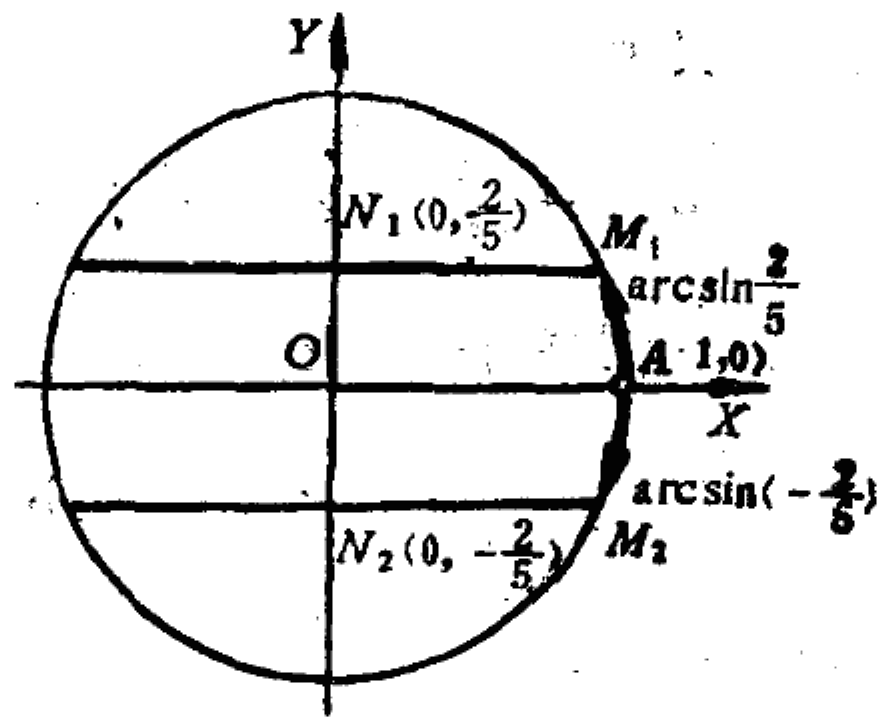


图 5

5. 写出正弦等于$\frac{1}{2}$的弧的集合。

解：在单位圆上有两个点，它们是正弦等于$\frac{1}{2}$的弧α_1和α_2的终点：

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\alpha_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6}。$$

因此，所求的弧的集合可表示为：

$$\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{和} \alpha=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=-\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi,$$

或 $\alpha=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi\ (n\in Z)$。

6. **写出正弦等于下列数值的弧的集合：**

1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；2）$-\frac{1}{2}$；3）1；4）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

7. **作出正弦等于下列数值的弧，并写出和这些正弦值对应的弧的集合：**

1）$\frac{1}{3}$；2）$-\frac{2}{3}$；3）0.6。

8. **求出余弦等于a的弧α的集合。**

解：在单位圆的X轴上取一点$N(a,0)$；并通过这点作平行于Y轴的直线。我们分两种情况来研究。

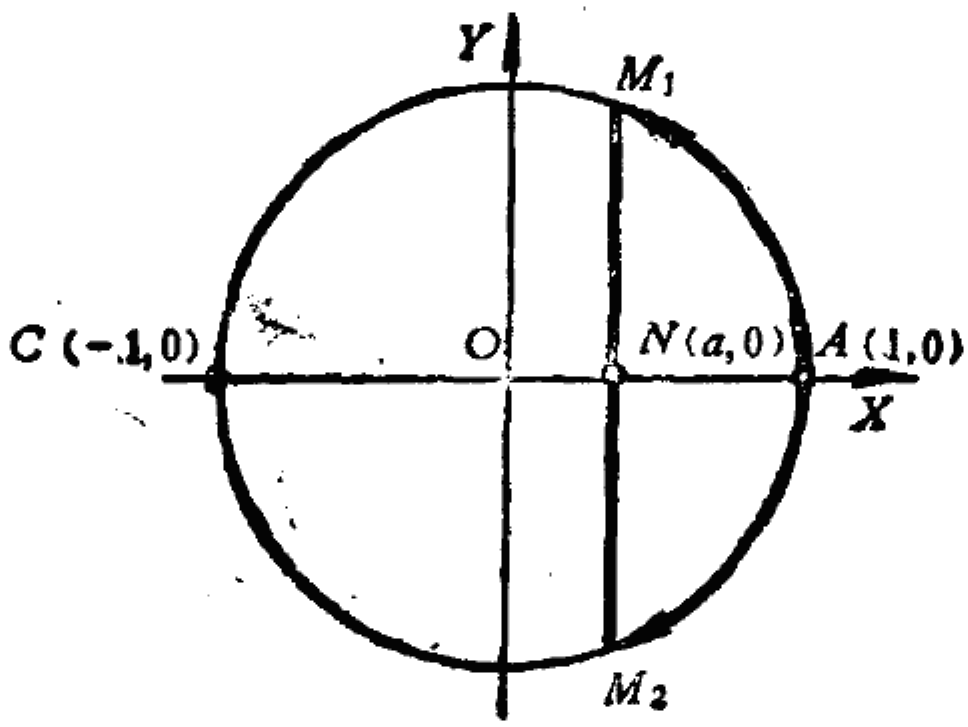


图 6

第一种情况：若$|a|<1$，则直线$x=a$和单位圆相交于M_1和M_2两点，这两点关于X轴为对称（图6）。点M_1与弧$\overset{\frown}{AM_1}=\arccos a$相对应，而点$M_2$与弧$\overset{\frown}{AM_2}=-\arccos a$相对应。这两个弧的余弦都等于$a$。终点为$M_1$而余弦等于$a$的弧的集合可表示为：

$$\alpha=\arccos a+2k\pi(k\in Z),$$

而终点为M_2且余弦等于a的弧的集合可表示为：

$$\alpha = -\text{arc}\cos a + 2k\pi \quad (k \in Z)。$$

这两个公式可合而为一：

$$\alpha = \pm \arccos a + 2k\pi \quad (k \in Z)。$$

第二种情况：若$a = \pm 1$，如果$a = 1$，则点$N(a,0)$与点$A(1,0)$重合，如果$a = -1$，则点$N(a,0)$与点$C(-1,0)$重合。终点为$A(1,0)$（在$a = 1$时）的弧的集合可表示为：

$$\alpha = 2k\pi \quad (k \in Z),$$

而终点为$C(-1,0)$（在$a = -1$时）的弧的集合可表示为：

$$\alpha = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi \quad (k \in Z)。$$

在余弦等于a（$|a| \leqslant 1$）的所有的弧（角）中，区间$[0,\pi]$内的弧$\text{arc}\cos a$称为反余弦函数的主弧。

9． 写出余弦等于下列数值的主弧：

1）0；2）1；3）-1；4）$\frac{1}{2}$；5）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$；6）$-\frac{3}{4}$。

解：1）$\alpha = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$；

2）$\alpha = \arccos 1 = 0$；

3）$\alpha = \arccos(-1) = \pi$；

4）$\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$；

5）$\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4}$

$= \frac{3\pi}{4}$；

6）$\alpha=\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)=\pi-\arccos\frac{3}{4}$。

10. 作出$\arccos\frac{2}{3}$和$\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$的主弧：

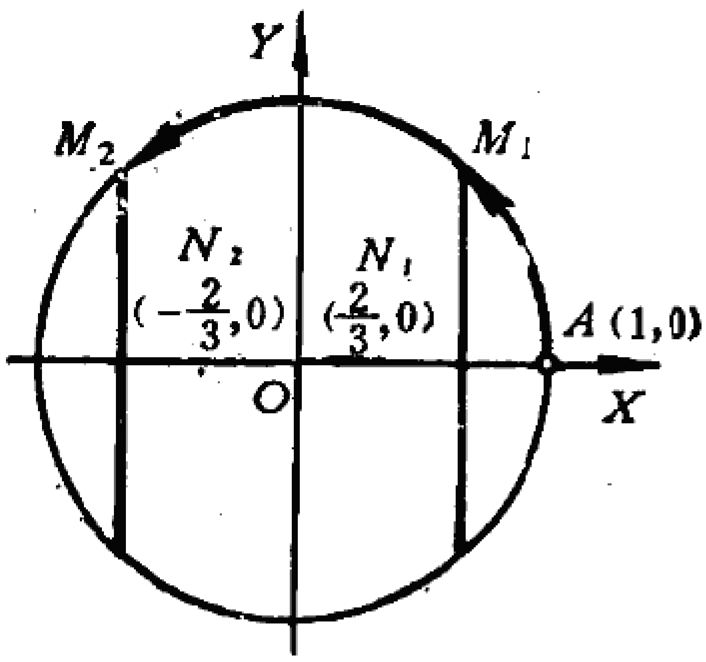


图 7

解：图7中作法满足条件：

$$\overset{\frown}{AM_1}=\arccos\frac{2}{3},$$

$$\overset{\frown}{AM_2}=\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\pi-\arccos\frac{2}{3}。$$

11. 写出余弦等于$\frac{1}{2}$的弧的集合。

解：在单位圆上有两个点，它们是弧α_1和α_2的终点，这两个弧的余弦都等于$\frac{1}{2}$：

$$\alpha_1=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3},$$

$$\alpha_2=-\arccos\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{3}。$$

因此，所求的弧的集合可表示为：

$$\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in Z)。$$

12. 写出余弦等于下列数值的弧的集合：

1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$。

13. 作出余弦等于：1) $\frac{4}{5}$; 2) $-\frac{4}{5}$; 3) 0.6的弧，并写出与这些余弦值相对应的弧的集合。

14. 求出正切等于a的弧α的集合。

解：在正切轴上(图8)取一点$N(1,a)$，过这点和坐标原点作一条直线，与单位圆交于M_1和M_2两点，弧$\overset{\frown}{AM_1}$和$\overset{\frown}{AM_2}$的正切等于半径OM的延长线与正切轴交点N的纵坐标a。点M_1与弧$\overset{\frown}{AM_1}=$ arctg$a$相对应，而点M_2与弧$\overset{\frown}{AM_2}=$ arc tg $a+\pi$相对应。这些弧的正切都等于a。终点为M_1和M_2的弧的集合可用一般式表示为：

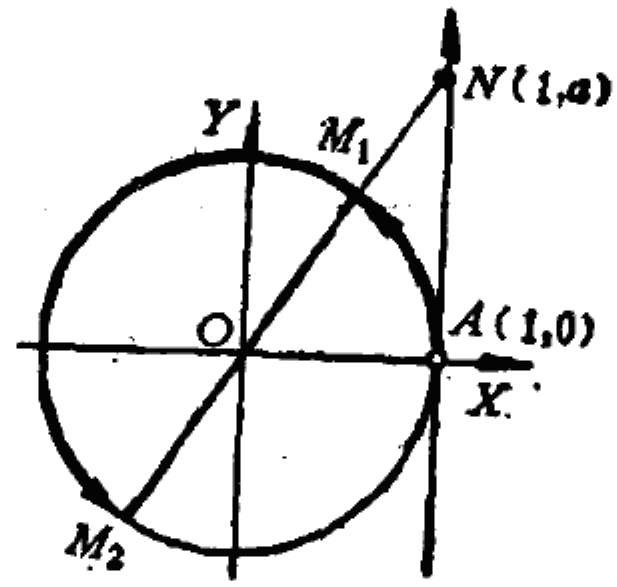


图8

$$\alpha=\text{arctg}a+k\pi \quad (k\in Z)。$$

在已知正切值为a的所有的弧（角）中，区间$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$内绝对值最小的弧arctg$a$称为反正切函数的主弧。

15. 写出正切值等于下列数值的主弧：

1) 0; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 1; 5) -1。

解：1) $\alpha=\text{arctg}0=0$;

2) $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$;

3) $\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$;

4) $\alpha = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$;

5) $\alpha = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg}1 = -\frac{\pi}{4}$。

16、写出正切等于下列数值的主弧：

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) -0.7。

17、作出弧$\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$和$\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)$的主弧。

解：在图 9 上作出：

$$\overset{\frown}{AM_1} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3},$$

$$\overset{\frown}{AM_2} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{4}{3}。$$

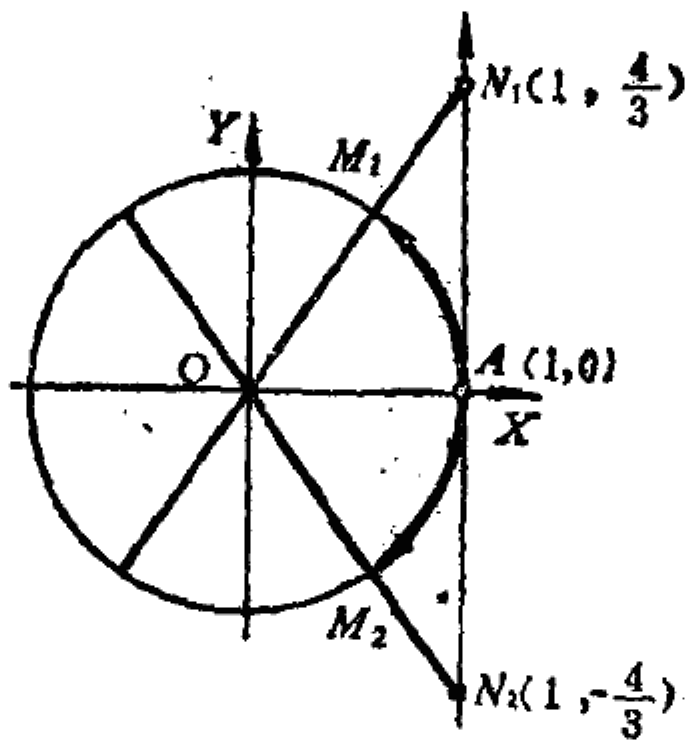


图 9

18、写出正切等于$\sqrt{3}$的弧的集合。

解：在单位圆上有两个点，它们分别是正切值等于$\sqrt{3}$的弧α_1和α_2的终点：

$$\alpha_1=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}，\text{和}\alpha_2=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi=\frac{\pi}{3}+\pi。$$

因此，所求弧的集合可用公式表示为：

$$\alpha=\frac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in Z)。$$

19．写出正切等于下列数值的弧的集合：

1）0；2）$\frac{\sqrt{3}}{3}$；3）-1；4）$-\sqrt{3}$；5）$\sqrt{2}$。

20．作出正切值等于：1）$-\frac{2}{3}$；2）2；3）-1.5的弧，并指出与这些正切值对应的弧的集合。

21．求余切等于a的弧α的集合。

解：在余切轴上（图10）取一点$N(a,1)$，过这点和坐标原点作一条直线，与单位圆交于M_1和M_2两点。弧$\overset{\frown}{AM_1}$和$\overset{\frown}{AM_2}$的余切等于半径OM_1的延长线与余切轴的交点N的横坐标a，这里弧$\overset{\frown}{AM_1}=\operatorname{arcctg}a$与点$M_1$相对应，而弧$\overset{\frown}{AM_2}=\operatorname{arcctg}a+\pi$与点$M_2$相对应。这些弧的余切值都等于$a$。因此，终点为$M_1$和$M_2$的弧的集合可表示为：

$$\alpha=\operatorname{arcctg}a+k\pi(k\in Z)。$$

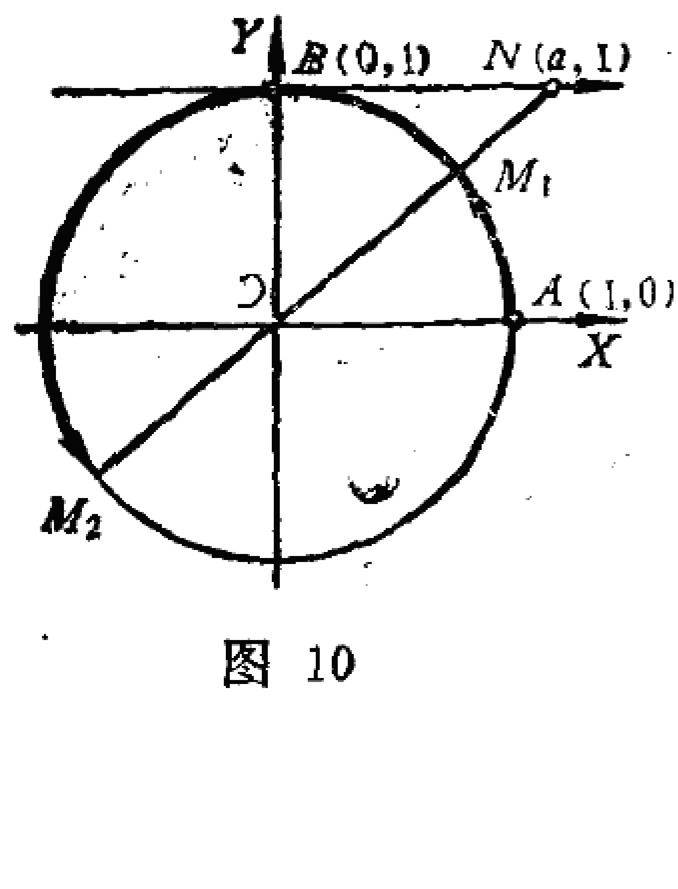


图 10

在余切值等于a的所有的弧（角）中，区间$(0,\pi)$内的弧$\operatorname{arcctg}a$称为反余切函数的主弧。

22．写出余切值等于下列数值的主弧：1）$\frac{\sqrt{3}}{3}$；2）-1；3）$\sqrt{3}$；4）$-\sqrt{3}$。

解：1）$\alpha=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$；

2）$\alpha=\pi-\operatorname{arcctg}1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$；

3）$\alpha=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$；

4）$\alpha=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$。

23．作出arcctg1和arcctg（－1）的主弧。

解：在图11上作出：

$$\overset{\frown}{AM_1}=\operatorname{arcctg}1=\frac{\pi}{4},$$

$$\overset{\frown}{AM_2}=\pi-\operatorname{arcctg}1$$

$$=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}。$$

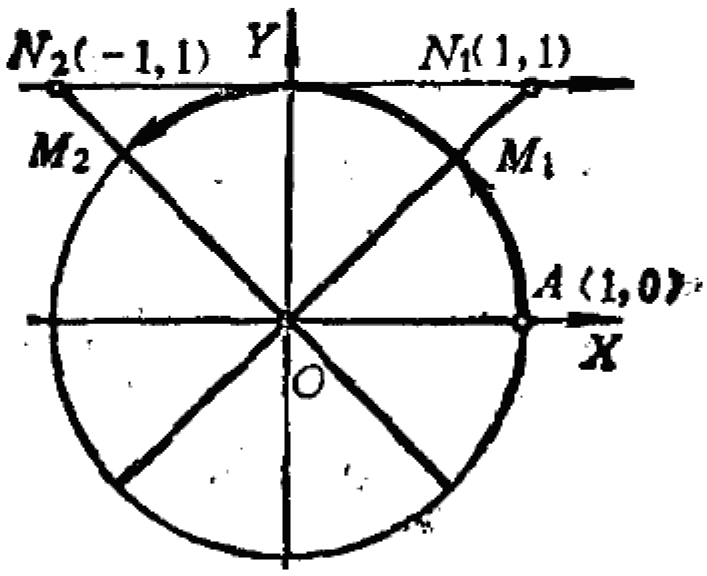


图 11

24．写出余切值等于$\sqrt{3}$的弧的集合。

解：在单位圆上有两个点，以这两点为终点的弧α_1和α_2的余切都等于$\sqrt{3}$：

$$\alpha_1=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}，和\alpha_2=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}+\pi=\frac{\pi}{6}+\pi。$$

因此，所求的弧的集合可用公式表示为：

$$\alpha=\frac{\pi}{6}+k\pi\quad(k\in Z)。$$

25．写出余切值等于下列数值的弧的集合：

1） $-\frac{\sqrt{3}}{3}$； 2） $-\sqrt{3}$； 3） 1； 4） $\frac{1}{2}$，

26. 作出余切值等于：1） -2； 2） 0.8； 3） $-\frac{2}{3}$的弧，并写出与这些余切值对应的弧的集合。

§2. 三角方程与三角不等式

方程 $\sin x=m$，$\cos x=m$，$\operatorname{tg}x=m$，和$\operatorname{ctg}x=m$，称为简单三角方程，这里m为已知数。

解简单三角方程就意味着，在已知三角函数取给定值m的情况下，求出自变量（弧或角）所有的值的集合。

不等式$\sin x<m$，$\sin x>m$，$\cos x<m$，$\cos x>m$，$\operatorname{tg}x<m$，$\operatorname{tg}x>m$，$\operatorname{ctg}x<m$和$\operatorname{ctg}x>m$，称为简单三角不等式，这里m为已知数。

解简单不等式就意味着，在把已知不等式变成同解不等式的情况下，求出自变量（弧或角）所有的值的集合。

27. 解方程$\sin x=m$。

解：如果$m\leqslant1$，那么在单位圆中有两个正弦值都等于m的弧$\arcsin m$和$\pi-\arcsin m$，这两条弧的终点关于y轴为对称（图12）。

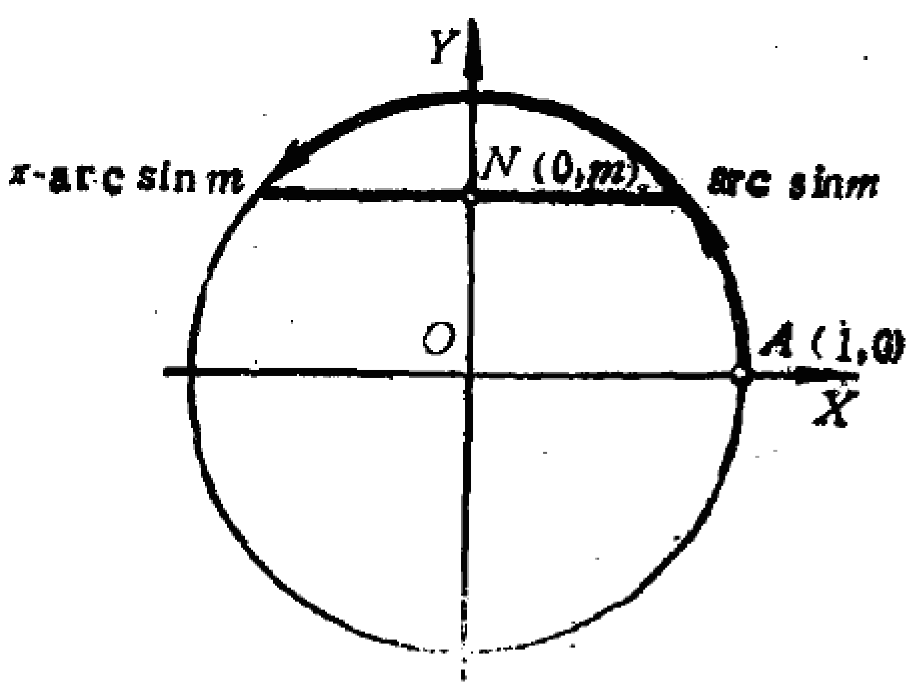


图 12

在区间$[-\frac{\pi}{2}$，

$\frac{\pi}{2}$〕内，绝对值最小，而正弦值等于m的弧$\arcsin m$，称为方程$\sin x=m$的主解。满足方程$\sin x=m$的全部未知弧的集合是求得的两条弧再加上正弦周期的任意整数倍：

$$x=\begin{cases}\arcsin m+2k\pi,\\ \pi-\arcsin m+2k\pi,\end{cases}$$

或

$$x=\begin{cases}\arcsin m+2k\pi,\\ -\arcsin m+(2k+1)\pi。\end{cases}$$

方程的解集可写成一个公式（参看习题104）：

$$x=(-1)^n\arcsin m+n\pi\,(n\in Z)。$$

如果$|m|>1$，那么方程无解。

特殊情况：

1) $\sin x=-1$，$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$；

2) $\sin x=0$，$x=k\pi$，$k\in Z$；

3) $\sin x=1$，$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$。

28. 解方程$\sin x=\frac{1}{2}$。

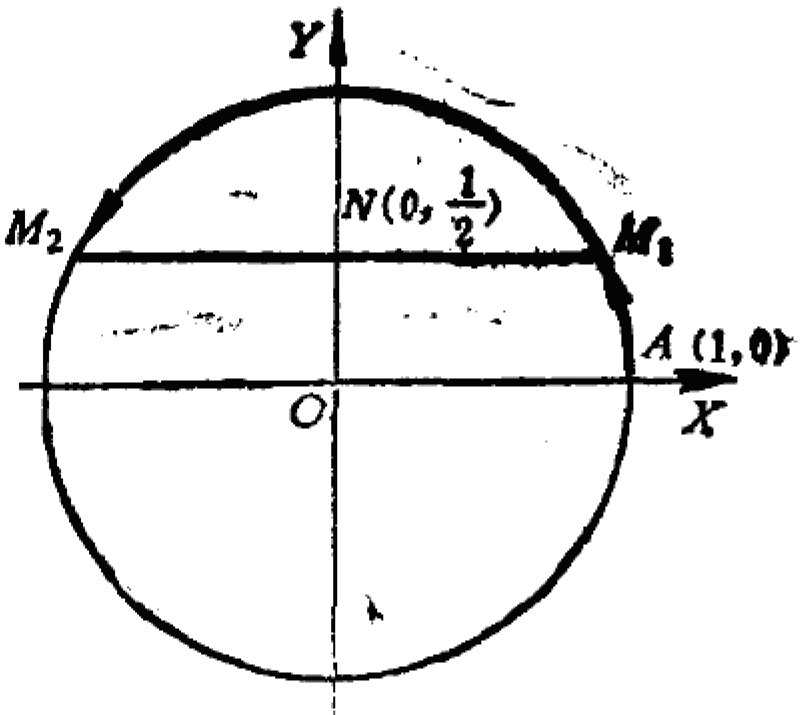


图 13

解：在区间〔$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$〕内，正弦值等于$\frac{1}{2}$的弧$\overset{\frown}{AM_1}=\frac{\pi}{6}$是方程的主解

（图 13）。

方程的解集为：

$$\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi\ \middle|\ n\in Z\right\}。$$

29．解方程：

1）$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$；　2）$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

3）$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；4）$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，5）$\sin x=\frac{4}{5}$。

30．解不等式 $\sin x<\frac{1}{2}$。

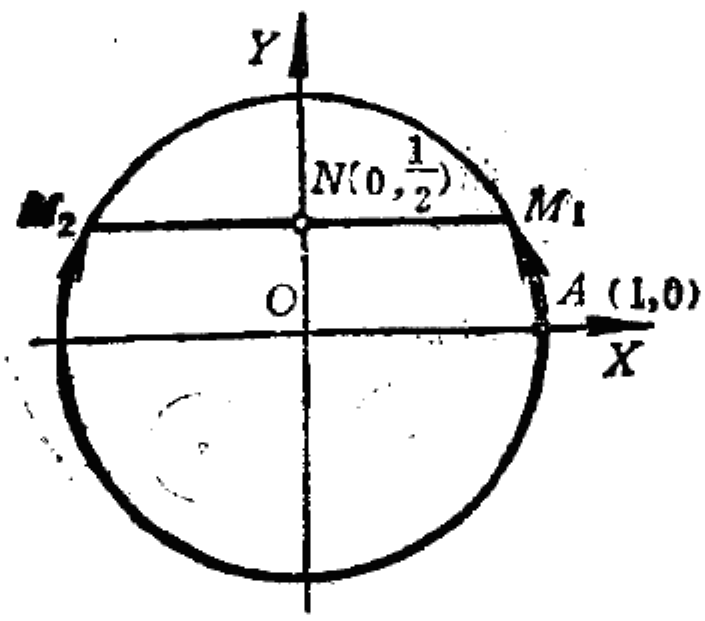


图 14

解：注意到正弦函数的有界性，原不等式可改写成 $-1<\sin x<\frac{1}{2}$。由图14可知：$\overset{\frown}{AM_1}=\frac{\pi}{6}$，

$\overset{\frown}{AM_2}=-\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$。

因此，在区间 $(-\frac{7\pi}{6},\frac{\pi}{6})$ 内的弧满足不等式 $\sin x<\frac{1}{2}$，根据正弦函数的周期性，原不等式的解集为：

$$\left(-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\ k\in Z。$$

31．解不等式$|\sin x|>\frac{1}{2}$。

解：不等式$x_1<x<x_2$和$x_3<x<x_4$的所有的弧x都满足原不等式。这里$x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\pi-\frac{\pi}{6}$，$x_3=x_1+\pi=\frac{\pi}{6}+\pi$，$x_4=x_2+\pi=\frac{5\pi}{6}+\pi$。即

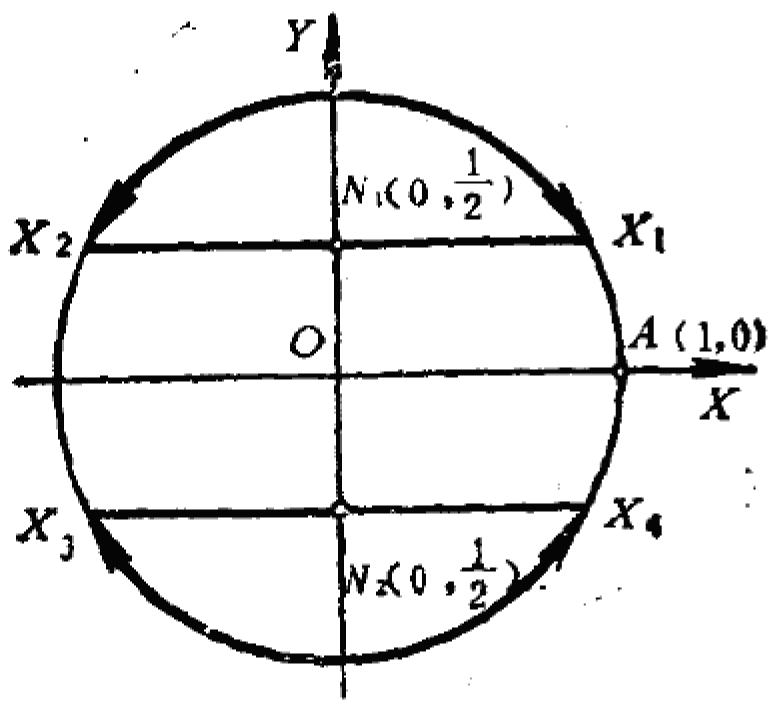


图 15

$$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}\text{和}\frac{\pi}{6}+\pi<x<\frac{5\pi}{6}+\pi\ （图15）。$$

不等式的公共解集为：

$$(\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+k\pi)\ ,\ k\in Z。$$

32.解不等式：

1) $\sin x<0$；2) $\sin x>0$；3) $\sin x<1$；4) $\sin x<-\frac{1}{2}$；

5) $\sin x>-\frac{1}{2}$；6) $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$；7) $|\sin x|<\frac{1}{2}$；

8) $\sin x>\frac{1}{2}$。

33．解方程$\cos x=m$。

解：如果$|m|\leqslant1$，那么在单位圆上有条关于x轴为对

称且余弦值等于 m 的弧：$\overset{\frown}{AM_1}=\arccos m$ 和 $\overset{\frown}{AM_2}=-\arccos m$（图16）。

在区间$[0,\pi]$内，余弦值等于 m 的最小的正弧 $\arccos m$，称为方程$\cos x=m$ 的主解。满足方程$\cos x=m$ 的所有的弧的集合，是求得的两条弧与余弦周期整数倍的和：

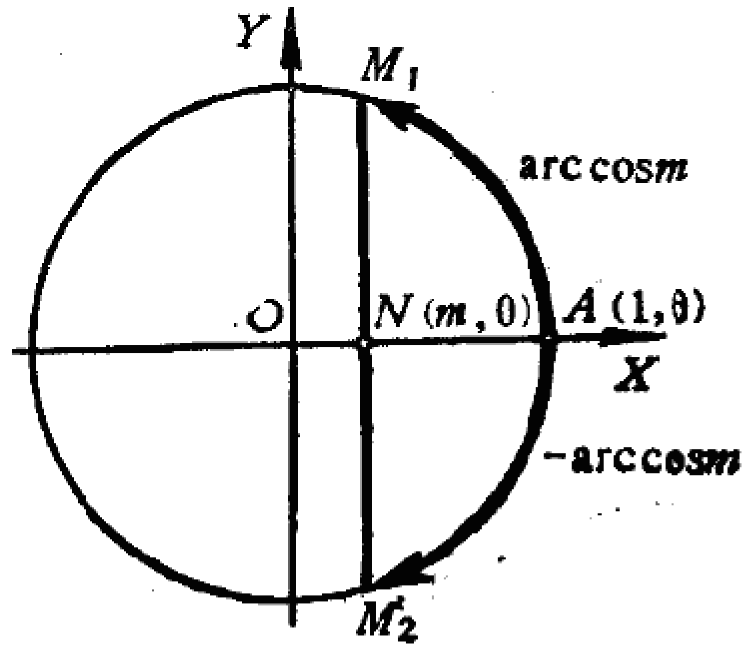


图 16

$$x=\pm\arccos m+2k\pi,$$

$k\in Z$。

如果$m>1$，那么方程无解。

特殊情况：

1）$\cos x=-1$，$x=\pm\pi+2k\pi$，或 $x=(2k+1)\pi$，$k\in Z$；

2）$\cos x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$；

2）$\cos x=1$，$x=2k\pi$，$k\in Z$。

34．解方程$\cos x=-\dfrac{1}{2}$。

解：在区间$[0,\pi]$内，余弦值等于$-\dfrac{1}{2}$的弧 $\overset{\frown}{AM_1}=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$是方程的主解（图17）。方程的解集为：

$$\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z\right\}。$$

35．解方程：

1) $\cos x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\cos x=-0.3$。

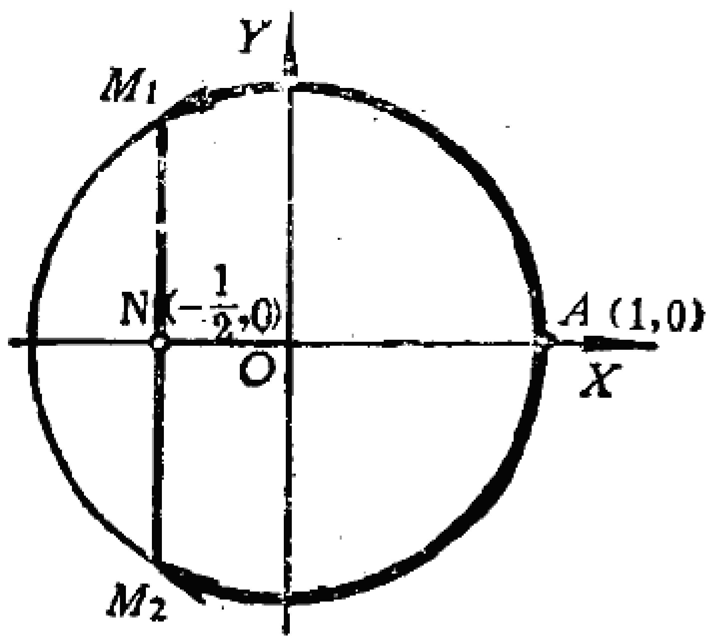


图 17

36. 解不等式$\cos x>-\frac{1}{2}$。

解：原不等式可改写成：

$$-\frac{1}{2}<\cos x\leqslant 1。$$

在区间（$-\frac{2\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$）内的弧满足不等式$\cos x>-\frac{1}{2}$（参看图17）。因此，不等式的解集为：

$$\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right),\ k\in Z。$$

37. 解不等式$\cos x<-\frac{1}{2}$

解：注意到余弦函数的有界性，原不等式可改写成：

$$-1\leqslant\cos x<-\frac{1}{2}。$$

我们有

$\widehat{AM}_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$,

$\widehat{AM}_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

（图18）。

因此，在区间（$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$）内的弧满足不等式$\cos x < -\frac{1}{2}$。由余弦函数的周期性，得不等式的解集为：

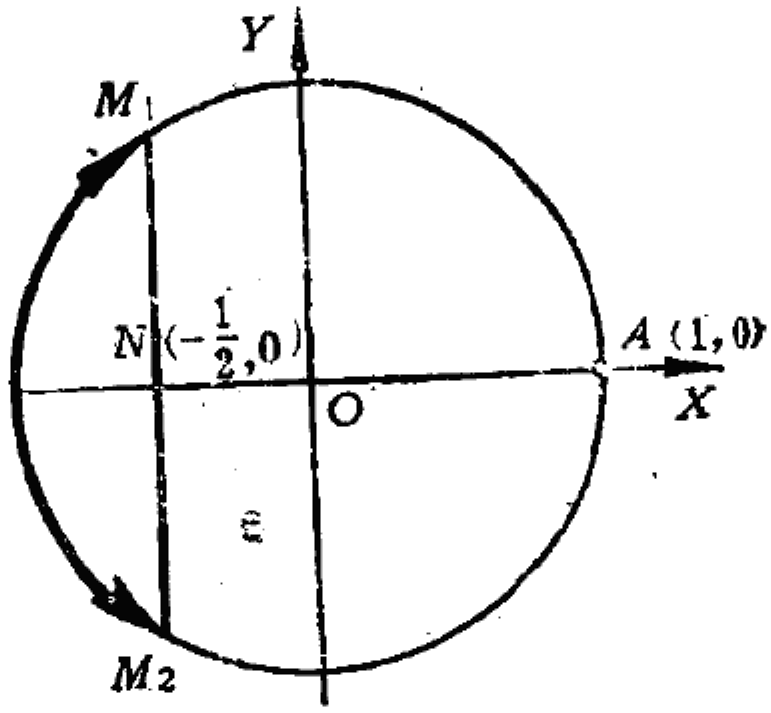


图 18

$$\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in Z。$$

38．解不等式 $|\cos x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$。

解：对于$x_2 < x < x_1$和$x_4 < x < x_3$中的所有的弧都满足原不等式。这里$x_1 = \frac{\pi}{4}$，$x_2 = -\frac{\pi}{4}$，$x_3 = x_1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi$，$x_4 = x_2 - \pi = -\frac{\pi}{4} - \pi$，即对于$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$和$-\frac{\pi}{4} - \pi < x < \frac{\pi}{4} + \pi$中的所有的弧都满足原不等式。因此，不等式的解集为：

$$\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right), \quad k \in Z（图19）。$$

39．解不等式：

1）$\cos x<0$；

2）$\cos x>0$；

3）$\cos x>-1$；

4）$\cos x<1$；

5）$\cos x<\frac{1}{2}$；

6）$\cos x>\frac{1}{2}$；

7）$|\cos x|<\frac{1}{2}$。

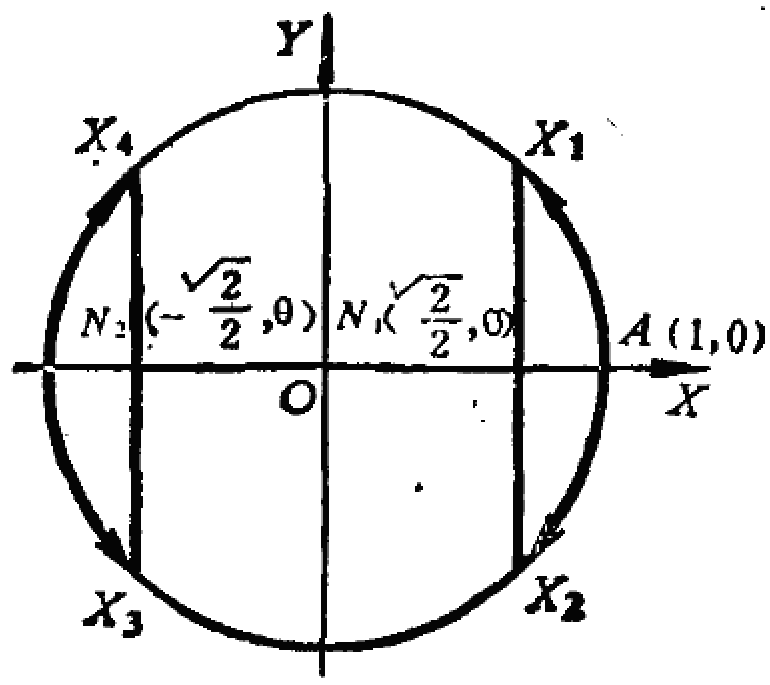


图 19

40．解方程$\operatorname{tg}x=m$。

解：在区间（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$）内，正切值等于m的绝对值最小的弧 $\operatorname{arctg}m$，称为方程$\operatorname{tg}x=m$的主解。因此，满足方程$\operatorname{tg}x=m$的所有的弧的集合为求出的主弧加上正切周期的任何整数倍：

$$x=\operatorname{arctg}m+k\pi,\ k\in Z。$$

特殊情况：$\operatorname{tg}x=0$，$x=k\pi$，$k\in Z$。

41．解方程 $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$。

解：在区间（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$）内，正切等于$\sqrt{3}$的主弧为$\frac{\pi}{3}$（图20）。因此，方程的解集为：

$$\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi \,\middle|\, k\in Z\right\}。$$

42. 解方程：

1) $\operatorname{tg}x = -\sqrt{\frac{3}{3}}$，

2) $\operatorname{tg}x = 1$；3) $\operatorname{tg}x = 1.327$。

43. 解不等式$\operatorname{tg}x > \sqrt{3}$。

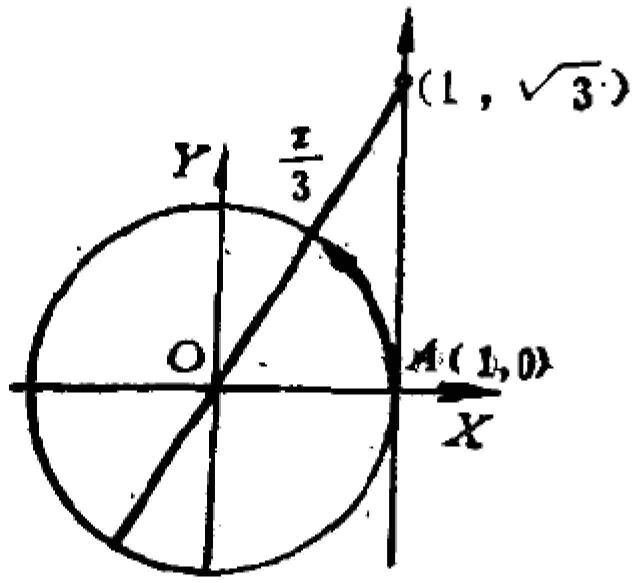


图 20

解：注意到正切函数的无界性，原不等式可改写成$\sqrt{3} < \operatorname{tg}x < +\infty$。区间 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ 内的弧满足不等式$\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$。因此，由正切函数的周期性，得原不等式的解集为：

$$(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in Z.$$

44. 解不等式：

1) $\operatorname{tg}x < -\sqrt{3}$；2) $\operatorname{tg}x > -\sqrt{3}$；3) $|\operatorname{tg}x| < \sqrt{3}$。

45. 解方程$\operatorname{ctg}x = m$。

解：在区间 $(0, \pi)$ 内，余切值等于m的最小的正弧 $\operatorname{arc\,ctg}m$，称为方程 $\operatorname{ctg}x = m$ 的主解。因此，满足方程$\operatorname{ctg}x = m$的弧的集合是求得的主弧加上余切周期的整数倍：

$$x = \operatorname{arcctg}m + k\pi,\ k \in Z。$$

特殊情况：$\operatorname{ctg}x = 0$，$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$，$k \in Z$。

46. 解方程 $\operatorname{ctg}x = -1$。

解：在区间 $(0, \pi)$ 内，余切值等于 -1 的弧 $\overset{\frown}{AM} =$

$\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$是方程的主解(图21)。因此，方程的解集为：

$$\left\{\frac{3\pi}{4}+k\pi \,\middle|\, k\in Z\right\}。$$

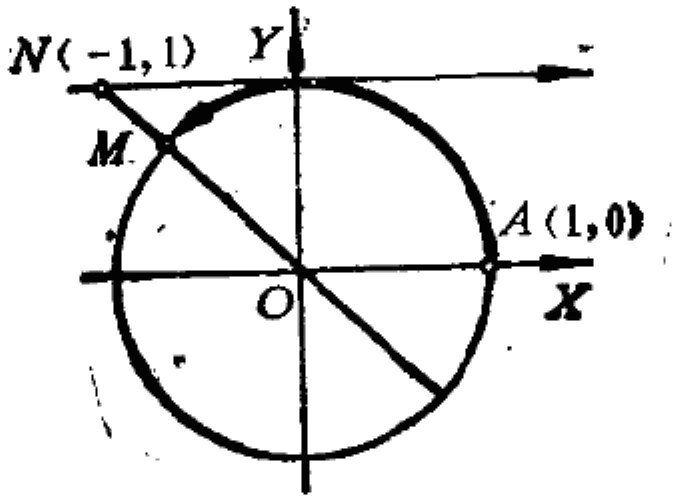


图 21

47.解方程：

1) $\mathrm{ctg}x=1$； 2) $\mathrm{ctg}x=-\sqrt{3}$； 3) $\mathrm{ctg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$； 4) $\mathrm{ctg}x=2.05$。

48. 解不等式$\mathrm{ctg}x>1$。

解：注意到余切函数的无界性，我们可把原不等式改写成：

$1<\mathrm{ctg}x<+\infty$。

在区间 $(0,\frac{\pi}{4})$ 内的弧满足不等式 $\mathrm{ctg}\ x>1$（图 22）。因此，不等式的解集为：

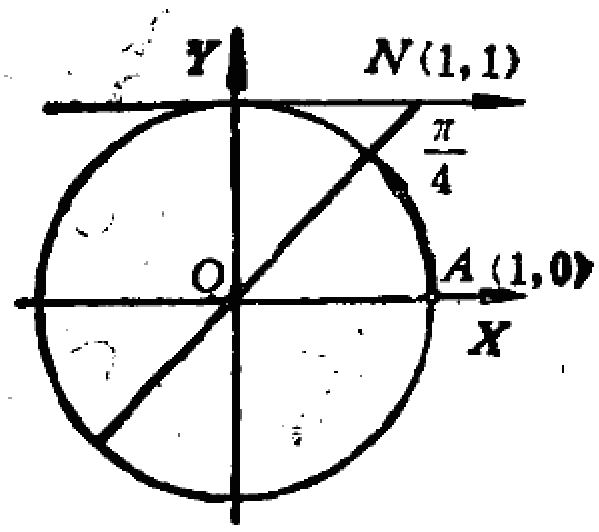


图22

$$(k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{4}),\ k\in Z。$$

49. 解不等式：

1) $\mathrm{ctg}x<-1$； 2) $\mathrm{ctg}x>-1$；

3) $\mathrm{ctg}x>\sqrt{3}$； 4) $|\mathrm{ctg}x|<1$。

50. 解方程：

1) $\sin 2x=\frac{1}{2}$； 2) $\mathrm{tg}(3x+2)=-1$；

3） $\text{ctg}x^2=0$； 4） $\cos(\cos x)=\frac{1}{2}$。

解：1） $2x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$。方程的解集为：

$$\left\{(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\,\middle|\,k\in Z\right\}；$$

2） $3x+2=-\frac{\pi}{4}+k\pi$，$3x=-\frac{\pi}{4}-2+k\pi$；因此，方程的解集为：

$$\left\{-\frac{\pi}{12}-\frac{2}{3}+\frac{k\pi}{3}\,\middle|\,k\in Z\right\}；$$

3） $x^2=\frac{\pi}{2}+|k|\pi$；方程的解集为：

$$\left\{\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+|k|\pi}\,\middle|\,k\in Z\right\}；$$

4） $\cos x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$；由于任何的$k\in Z$都会使方程右边的绝对值大于1，所以方程无解。

51．解方程：

1） $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$； 2） $\text{tg}(3x+1)=1$；

3） $\text{tg}3x=\frac{\sqrt{3}}{3}$； 4） $\sin\pi x=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

5） $\cos x^2=1$； 6） $\sin(\cos x)=0$。

52．解不等式：1） $\sin\frac{x}{2}>\frac{1}{2}$； 2） $\text{tg}2x<-1$。

解：1）我们有 $\frac{\pi}{6}+2k\pi<\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，

$$\frac{\pi}{3}+4k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+4k\pi,$$

或 $x\in(\frac{\pi}{3}+4k\pi,\ \frac{5\pi}{3}+4k\pi),k\in Z$。

2）我们有 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x<-\frac{\pi}{4}+k\pi$，

$$-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},$$

或 $x\in(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ -\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})$，$k\in Z$。

53．解不等式：

1）$\sin2x<-\frac{1}{2}$；2）$\cos\frac{x}{2}>-\frac{1}{2}$；

3）$\operatorname{ctg}\frac{x}{3}>1$；4）$\operatorname{tg}3x>-1$。

54．解方程 $\sin^2x=m$（$0\leqslant m\leqslant1$）。

解：已知方程可化为两个简单方程 $\sin x=\sqrt{m}$ 和 $\sin x=-\sqrt{m}$。这两个方程的解可表示为：

$x=k\pi+(-1)^k\arcsin\sqrt{m}$，$x=k\pi-(-1)^k\arcsin\sqrt{m}$。

这两个公式中影响第二项符号的因式 $(-1)^k$ 是无关紧要的。因为，对于某个整数k，如果在第一个公式中 $\arcsin\sqrt{m}$ 前取正号，那么对这同一个k在第二个公式中 $\arcsin\sqrt{m}$ 前取

负号，反之亦成立（依k的奇偶性而定）。因此，这两个公式可简化为一个公式：

$$x=n\pi\pm\arcsin\sqrt{m},\ n\in Z。$$

55. 解方程：

1) $\sin^2x=\frac{1}{2}$； 2) $\sin^2x=1$；

3) $\sin^2x=\frac{3}{4}$； 4) $\sin^2x=0$。

56. 解方程$\cos^2x=m$（$0\leqslant m\leqslant1$）。

解：已知方程可化为两个简单方程$\cos x=\sqrt{m}$和$\cos x=-\sqrt{m}$。第一个方程的解可写成：$x=2k\pi\pm\arccos\sqrt{m}$，第二个方程的解可写成：$x=2k\pi\pm(\pi-\arccos\sqrt{m})=(2k\pm1)\pi\pm\arccos\sqrt{m}$。两个公式合并后，得：

$$x=n\pi\pm\arccos\sqrt{m},\ n\in Z。$$

57. 解方程：1) $\cos^2x=1$； 2) $\cos^2x=\frac{1}{2}$；

3) $\cos^2x=\frac{1}{9}$； 4) $\cos^2x=0$。

58. 解方程：1) $\mathrm{tg}^2x=m$； 2) $\mathrm{ctg}^2x=m$。

解：1) 已知方程可化为两个简单方程：$\mathrm{tg}x=\sqrt{m}$和$\mathrm{tg}x=-\sqrt{m}$。第一个方程的解可写成：$x=k\pi+\mathrm{arctg}\sqrt{m}$；第二个方程的解可写成：$x=k\pi-\mathrm{arctg}\sqrt{m}$。两个公式合并后，得：

$$x=k\pi\pm\mathrm{arctg}\sqrt{m},\ k\in Z。$$

2) 类似地可求得： $x=k\pi\pm\mathrm{arcctg}\sqrt{m}$，$k\in Z$。

59．解方程：1）$tg^2x=1$；2）$ctg^2x=3$；3）$tg^2x=\frac{1}{3}$。

60．解方程：

1）$2\sin^2x-7\sin x+3=0$；

2）$4\cos^2x+\sin x-1=0$；

3）$2ctg3x+tg3x+3=0$；

4）$tgx\cos x+tgx-\cos x-1=0$；

5）$tg^3x=tgx$。

解：1）解关于$\sin x$的方程：

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm5}{4},\quad(\sin x)_1=\frac{1}{2},$$

$(\sin x)_2=3$；$\sin x=\frac{1}{2}$，$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$；方程$\sin x=3$无解。于是，方程的解集为：

$$\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi\ \middle|\ k\in Z\right\}。$$

2）我们有$4(1-\sin^2x)+\sin x-1=0$，$4\sin^2x-\sin x-3=0$，$\sin x=-\frac{3}{4}$和$\sin x=1$，$x=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{3}{4}+k\pi$和$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$。于是，方程的解集为：

$$\left\{(-1)^{k+1}\arcsin\frac{3}{4}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\ \middle|\ Z\in k\right\}。$$

3）这里$3x\neq k\pi$，$3x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，即

$x \neq \frac{k\pi}{3}$，$x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$。用$\frac{1}{\operatorname{tg}3x}$代替ctg $3x$，得：

$$2\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}3x}+\operatorname{tg}3x+3=0,\quad \operatorname{tg}^2 3x+3\operatorname{tg}3x+2=0;$$

$$\operatorname{tg}3x=-2,\quad 3x=-\operatorname{arctg}2+k\pi.$$

$$x=-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}2+\frac{k\pi}{3};$$

$$\operatorname{tg}3x=-1,\quad 3x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}.$$

因此，满足方程的解集为：

$$\left\{-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}2+\frac{k\pi}{3},\ -\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\ \middle|\ k\in Z\right\}.$$

4) 这里$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$。把方程左边分解因式，然后令每个因式等于零，得：

$$\operatorname{tg}x(\cos x+1)-(\cos x+1)=0,$$
$$(\cos x+1)(\operatorname{tg}x-1)=0$$
$$\cos x+1=0,\ \cos x=-1,\ x=(2k+1)\pi;$$

$$\operatorname{tg}x-1=0,\ \operatorname{tg}x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

因此，满足方程的解集为：

$$\left\{ (2k+1)\pi;\ \frac{\pi}{4}+k\pi \,\middle|\, k\in Z \right\}。$$

5）这里$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$。我们有：

$$\operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}x=0,\ \operatorname{tg}x(\operatorname{tg}^2x-1)=0;$$

$$\operatorname{tg}x=0,\ x=k\pi;$$

$$\operatorname{tg}^2x=1,\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi。$$

因此，满足方程的解集为：

$$\left\{ k\pi;\ \pm\frac{\pi}{4}+k\pi \,\middle|\, k\in Z \right\}。$$

61．解方程：1）$2\sin^2x+3\cos x-3=0$；

2）$\cos^2x-\cos x-2=0$；3）$5\operatorname{ctg}^2x-8\operatorname{ctg}x+3=0$。

62．解方程：1）$\sin x-\cos x=0$；

2）$\sin^2x-4\sin x\cos x+3\cos^2x=0$；

3）$2\sin^2x+5\sin x\cos x+\cos^2x-4=0$。

解：我们有

$$\sin x=\cos x,\ \frac{\sin x}{\cos x}=1,\ \cos x\neq0\ \left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right),$$

$$\operatorname{tg}x=1,\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z。$$

2）我们求得：

$$\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-\frac{4\sin x\cos x}{\cos^2x}+\frac{3\cos^2x}{\cos^2x}=0$$

$\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$；

$tg^2 x-4tg x+3=0$, $(tg x)_1=1$, $(tg x)_2=3$;

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\text{arctg}3+k\pi, k\in Z$。

3）将常数项乘以$\sin^2 x+\cos^2 x$，得到齐次方程：

$2\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x-4(\sin^2 x+\cos^2 x)=0$,

或$2\sin^2 x-5\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$。

用$\cos^2 x$（$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$）除各项，得：

$2tg^2 x-5tg x+3=0$, $(tg x)_1=1$ 和 $(tg x)_2=\frac{3}{2}$;

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$; $x=\text{arctg}\frac{3}{2}+k\pi$, $k\in Z$。

63．解方程：

1）$2\sin x-3\cos x=0$;

2）$\sin^2 x-6\sin x\cos x+5\cos^2 x=0$;

3）$9\sin^2 x+25\cos^2 x+32\sin x\cos x=25$。

64．解不等式：

1）$\sin x>-1$; 2）$\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3）$\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4）$\cos x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5）$tg x<\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6）$ctg x<1$。

65．解方程：

1） $\cos 2x=1$； 2） $\text{tg}(x-\frac{\pi}{2})=1$；

3） $\text{tg}(2x+\frac{\pi}{2})=-1$；

4） $\text{tg}x(\sin x+\cos x)=0$；

5） $\cos x(\text{tg}x-1)=0$；

6） $\text{tg}\frac{x}{2}(1+\cos x)=0$。

66．解方程：

1） $3\sin^2 x+\cos^2 x-2=0$； 2） $7\sin^2 x-5\cos^2 x+2=0$；

3） $\text{tg}x+\text{ctg}x=0$； 4） $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$。

67．解方程：

1） $\frac{\sin 2x}{\cos x}=0$； 2） $\cos^2 x+\sin x\cos x-1=0$；

3） $\sin x=\frac{1}{\cos x}$； 4） $\text{tg}^3 x+\text{tg}^2 x-3\text{tg}x-3=0$。

68．解方程：

1） $\sin^2 x-10\sin x\cos x+21\cos^2 x=0$；

2） $8\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x-4=0$。

小 测 验

第一组

解不等式和方程：

1) $\sin\frac{x}{2}<0$；

2) $\cos\frac{x}{2}=0$；

3) $\sin 3x=0.5$；

4) $2\cos x+\operatorname{tg}x-2\operatorname{tg}x\cos x-1=0$；

5) $2\sin^2x-3\cos^2x+\sin x\cos x=0$。

第二组

解不等式和方程：

1) $\operatorname{ctg}x>-\sqrt{3}$；

2) $3\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{2}$；

3) $\cos 2x\operatorname{tg}x=0$；

4) $4\sin^3x+4\sin^2x-3\sin x-3=0$；

5) $3\sin^2x+2\sin x\cos x-5\cos^2x=0$。

第三章　两角和与差的三角函数

§1.　两个自变量代数和的三角函数(加法公式)

欲求两个自变量之和或差的三角函数，可利用下列公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \quad (3.1)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \quad (3.2)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \quad (3.3)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \quad (3.4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),$$

$$\beta\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 1; \quad (3.5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),$$

$$\beta\neq\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq -1; \quad (3.6)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\ \alpha\neq k\pi,\ \beta\neq k\pi,$$

$$\alpha\neq-\beta+k\pi; \quad (3.7)$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta},\ \alpha\neq k\pi,\ \beta\neq k\pi,$$

$$\alpha\neq\beta+k\pi。\tag{3.8}$$

1. 计算：

1) 如果$\sin\alpha=\frac{3}{5}$， $\cos\beta=-\frac{5}{13}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，

$\beta\in(\pi,\ \frac{3\pi}{2})$，计算$\sin(\alpha+\beta)$；

2) 如果$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$， $\sin\beta=-\frac{24}{25}$，$\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，

$\beta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，计算$\sin(\alpha-\beta)$；

3) 如果$\mathrm{tg}\alpha=-\frac{24}{7}$， $\mathrm{tg}\beta=\frac{15}{8}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，

$\beta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，计算$\cos(\alpha+\beta)$。

解：1)当$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$和$\beta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$时，计算$\cos\alpha$和$\sin\beta$：

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5},$$

$$\sin\beta=-\sqrt{1-(-\frac{5}{13})^2}=-\frac{12}{13},$$

由公式(3.1)，得：

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot(-\frac{5}{13})+(-\frac{4}{5})\cdot(-\frac{12}{13})$$

$$= -\frac{33}{65}。$$

2）我们可求得：

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(-\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}。$$

由公式(3.2)，得：

$$\sin(\alpha-\beta) = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{7}{25} - \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{24}{25}\right)$$

$$= -\frac{117}{125}。$$

3）由公式$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$，得$\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$。

注意到$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$，我们求得$\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{24}{7}\right)^2}} = -\dfrac{7}{25}$，

$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\dfrac{7}{25}\right)^2} = \dfrac{24}{25}$。类似地可求得 $\cos\beta = -\dfrac{8}{17}$，

$\sin\beta = -\dfrac{15}{17}$。

由公式(3.3)，我们得到

$$\cos(\alpha+\beta) = \left(-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(-\frac{8}{17}\right) - \frac{24}{25}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right)$$

$$= \frac{416}{425}。$$

2．计算：

1） 已知$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=-\frac{3}{5}$，$\alpha\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，$\beta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，计算$\sin(\alpha+\beta)$和$\sin(\alpha-\beta)$；

2） 已知$\sin\alpha=\frac{8}{17}$，$\cos\beta=\frac{3}{5}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\beta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，计算$\cos(\alpha+\beta)$和$\cos(\alpha-\beta)$；

3） 已知$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，计算$\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$和$\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)$。

3．不查表，计算下列弧的正弦值和余弦值：$\frac{\pi}{12}$，$\frac{5\pi}{12}$和$\frac{7\pi}{12}$（$\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$；$\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$；$\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$）。

4．计算：

1） $\sin(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5})$；

2） $\cos(\arccos\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17})$。

解：1） 设$\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$，$\arcsin\frac{4}{5}=\beta$，那么我们有

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$和$\sin\beta=\frac{4}{5}$，$\beta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。

由此求得$\cos\alpha=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}$

$=\frac{3}{5}$。因此，

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}\right)=\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=1.$$

2）设$\arccos\frac{3}{5}=\alpha$，$\arcsin\frac{8}{17}$，那么$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in[0,\pi]$和$\sin\beta=\frac{8}{17}$，$\beta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。我们求得$\sin\alpha=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\sqrt{1-(\frac{8}{17})^2}=\frac{15}{17}$。于是，

$$\cos\left(\arccos\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)=\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}-\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{13}{83}.$$

5．计算：

1）$\cos\left(\arccos\frac{1}{7}-\arccos\frac{11}{14}\right)$；

2）$\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}\right)$。

6．计算下列各式：

1）$\sin20°\cos40°+\cos20°\sin40°$；

2）$\cos47°\cos17°+\sin47°\sin17°$。

解：1）$\sin20°\cos40°+\cos20°\sin40°$

$=\sin(20°+40°)\ =\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

2）$\cos 47°\cos 17°+\sin 47°\sin 17°$

$=\cos(47°-17°)=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

7．化简下列各式：

1）$\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$；

2）$\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$。

8．计算：

1）如果$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{5}$，　$\operatorname{tg}\beta=\dfrac{2}{3}$，计算$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$；

2）如果$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{2}$，　$\operatorname{tg}\beta=\dfrac{5}{2}$，计算$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$；

3）如果$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\ \pi)$，计算$\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)$。

解：1）由公式（3.5），得

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{3}}=1。$$

2）　求出$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{2}{3}$，$\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{2}{5}$。由公式

（8.44），得：

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}+1}{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}}=4\frac{3}{4}。$$

3) 我们有$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$。

由公式 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ 求得：

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}}=-\frac{12}{5}$$ 代入求得的正切值，得：

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1-\frac{12}{5}}{1+\frac{12}{5}}=-\frac{7}{17}。$$

9. 计算：

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$； 2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$； 3) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$；

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{15}+\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{15}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}}$；

5) 已知：$\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，$\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，求$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)$。

10. 计算：

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{3}{2})$；

2) $\operatorname{ctg}(\arcsin\frac{4}{5}+\operatorname{arctg}3)$。

解：1)由公式(3.5)，得：

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{3}{2})$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}}{1-\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}=8。$$

2) 设$\arcsin\frac{4}{5}=\alpha$，$\operatorname{arctg}3=\beta$，那么$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

$\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，和$\operatorname{tg}\beta=3$，$\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$。我们求出：

$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$，$\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{3}$。由公式(3.7)，得：

$$\operatorname{ctg}(\arcsin\frac{4}{5}+\operatorname{arctg}3)=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}-1}{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}。$$

11．计算：

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3})$；

2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}5-\operatorname{arcctg}\frac{1}{5})$。

12．化简：1）$\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha$；

2）$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}$；

3）$\dfrac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)\operatorname{tg}\alpha}$。

解：1）利用公式(3.1)，得：

$\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin3\alpha$。

2）$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}$

$=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\sin\beta\cos\alpha}$

$=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=1$。

3）利用公式(3.6)，得：

$$\frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha-\alpha)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1。$$

13．化简：

1）$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$；

2）$\cos(\frac{\pi}{3}+\alpha)\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)-\cos^2\alpha$；

3）$2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)+\sin^2\alpha$；

4）$\sin2\alpha-\cos2\alpha\operatorname{tg}\alpha$；

5) $\dfrac{1+\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{1-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)}$；

6) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)$。

14. 证明恒等式：

1) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$；

2) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$。

解：1）化简等式左边，得：

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)\right]}{2\left[\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right]}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha。$$

结果与右边相同。等式得到了证明。

2）化简等式的右边：

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}。$$

15．证明恒等式：

1） $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$；

2） $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\cos^2\beta$；

3） $\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)$；

4） $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$；

5） $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)$
$=\sin^2\beta$。

16．解方程：

1） $\sin2x\cos x+\cos2x\sin x=0$；

2） $\sin(\frac{\pi}{4}+x)+\cos(x-\frac{\pi}{4})=0$；

3） $\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}=1$。

解：1)利用公式(3.1)，得：

$$(\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0)\Longleftrightarrow(\sin(2x+x)=0)$$

$$\Longleftrightarrow(\sin 3x=0)\Longleftrightarrow(3x=k\pi)$$

$$\Longleftrightarrow x=\frac{k\pi}{3},\ k\in Z。$$

2) 利用公式(3.1)和(3.4)，得：

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}=0。$$

约去$\sin\frac{\pi}{4}$（$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$）再合并同类项，得到方程：

$$2\sin x+2\cos x=0，即\ \sin x+\cos x=0。$$

在$\cos x\neq 0$的情况下，我们有 $\mathrm{tg}x=-1$；$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in Z$。

3) 我们有：

$$\left(\frac{\mathrm{tg}x+1}{1-\mathrm{tg}x}=1\right)\Longleftrightarrow\left(\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}=1\right)$$

$$\Longleftrightarrow\left(\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\right)\Longleftrightarrow\left(x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$$

$$\Longleftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z。$$

17．解方程：

1) $\sin 2x\cos x=\cos 2x\sin x$；

2) $8\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-3\cos x=0$；

3) $5\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+7\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$。

§2. 综合题

18．计算：

1) 如果 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{7}{25}$，且$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求$\cos(\alpha+\beta)$和$\cos(\alpha-\beta)$；

2) 如果 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\beta=-\frac{24}{25}$，且$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，求$\sin(\alpha-\beta)$和$\cos(\alpha-\beta)$。

19．计算：

1) 如果 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$，求$\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)$；

2) 如果 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$，求$\operatorname{ctg}(\alpha-45^\circ)$。

20．化简：

1) $\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$；

2) $\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta+2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\sin\beta$。

21．证明恒等式：

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\alpha$；

2) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{3}{2}$；

3) $\dfrac{\cos(20-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}\sin 20}{\cos 3\cos 17-\sin 3\sin 17}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

4) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$；

5) $\dfrac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)}=2\sin\alpha\cos\alpha$；

6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$

$=1+\cos\alpha$。

22．证明恒等式：

1) $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta$；

2) $\dfrac{\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\sin^2\beta}-1=\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta$；

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$；

4) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)+(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$

$=2$；

5) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=2$。

23 证明恒等式：

1) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$；

2) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$；

3) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=0$。

24．证明恒等式：

1) $\cos 15°-\sqrt{3}\sin 15°=2\sin 45°$；

2) $\cos 59°\cos 79°+\cos 31°\cos 11°+\cos 20°=2\cos 20°$；

3) $\dfrac{\sin 40°\cos 15°-\cos 40°\sin 15°}{\cos 15°\cos 10°-\sin 15°\sin 10°}=\operatorname{tg}25°$；

4) $\dfrac{\cos 115°\sin 305°+\sin 35°\cos 25°}{\cos 160°\sin 230°-\cos 40°\sin 70°}=\sqrt{3}$。

25．解方程：

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=1$；

2) $\cos 2x\cos x=\sin 2x\sin x$；

3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=\dfrac{1}{2}\cos^2 2x$；

4) $\cos\dfrac{3x}{2}=\cos\dfrac{x}{2}\cos x$。

小 测 验

第一组

1) 已知：$\sin\alpha=-\frac{15}{17}$，$\cos\beta=\frac{8}{17}$，且$\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，$\beta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，计算$\cos(\alpha+\beta)$。

2) 计算$\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}-\arccos\frac{15}{17}\right)$。

3) 证明恒等式：

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta}=\mathrm{tg}\alpha。$$

4) 证明恒等式：

$$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta+(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)\times\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=1。$$

5) 解方程：

$$2\sin\left(\frac{4\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{3}+x\right)=0。$$

第二组

1) 已知：$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=-\frac{7}{25}$，且$\alpha\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，$\beta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，计算$\sin(\alpha-\beta)$。

2) 计算$\cos\left(\arcsin\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$。

3) 证明恒等式：

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}=\mathrm{tg}\alpha。$$

4) 证明恒等式：

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{8\,\mathrm{tg}\alpha}{1-3\,\mathrm{tg}^2\alpha}。$$

5) 解方程：

$$\sin x\sin 3x+\cos 4x=0。$$

§3. 倍角三角函数

倍角三角函数的公式可以将角2α的三角函数表示为角 α 的三角函数。

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \tag{3.9}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \tag{3.10}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \tag{3.11}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha \neq \frac{k\pi}{2}。 \tag{3.12}$$

由公式（3.10）容易得出下列关系式：

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \tag{3.10a}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha。 \tag{3.10b}$$

26．计算：

1）如果$\cos\alpha = \frac{4}{5}$，$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，计算$\sin 2\alpha$；

2）如果$\cos\alpha = -0.2$，$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，计算$\cos 2\alpha$；

3）如果$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$，$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$，计算$\operatorname{tg} 2\alpha$。

解：1）我们求得$\sin\alpha=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$。由公式（3.9），我们得到

$$\sin 2\alpha=2\cdot(-\frac{3}{5})\cdot\frac{4}{5}=-\frac{24}{25}。$$

2）由公式(3.10a)，求得$\cos2\alpha=2(-0.2)^2-1=-0.92$。

3）由公式（3.11），求得$tg2\alpha=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=3\frac{3}{7}$。

27．已知：1）$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$；2）$\cos\alpha=\frac{5}{13}$，且$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$；3）$tg\,\alpha=-\frac{3}{4}$，且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$；

计算：$\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$和$tg2\alpha$。

28．计算：

1）如果$tg\frac{z}{2}=\frac{5}{3}$，求$ctgz$；

2）如果$\sin\frac{3\alpha}{2}=-\frac{5}{13}$，且$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求$\sin3\alpha$，$\cos3\alpha$和$tg3\alpha$；

3）如果$tgx=\frac{1}{5}$，且$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$，求$\cos4x$和$tg4x$。

29．求下列各式的值：

1）已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求$\frac{\sin2\alpha}{2\cos\alpha}$；

2）已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求$\frac{\cos2\alpha}{\sin\alpha}$。

30．1）用$\sin\alpha$表示$\sin3\alpha$；2）用$\cos\alpha$表示$\cos3\alpha$。

解：1）
$$\begin{aligned}\sin3\alpha&=\sin(2\alpha+\alpha)\\&=\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin2\cdot\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\&=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\&=2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\end{aligned}$$

2）
$$\begin{aligned}\cos3\alpha&=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos2\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha\\&=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\sin\alpha\\&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha\sin^2\alpha\\&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)\\&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha\\&=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha。\end{aligned}$$

31．1）用$\sin\alpha$和$\cos\alpha$表示$\sin4\alpha$；

2）用$\sin\alpha$和$\cos\alpha$表示$\cos4\alpha$；

3）用$\mathrm{tg}\alpha$表示$\mathrm{tg}3\alpha$；

4）用$\cos\alpha$表示$\cos4\alpha$；

5）用$\sin\alpha$表示$\sin5\alpha$。

32．证明恒等式：

1）$2\sin^2\alpha+\cos2\alpha=1$；2）$1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$；

3）$\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\alpha$；

4) $\dfrac{\sin2\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\cos2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$；

5) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=1-0.5\sin^2 2\alpha$；

6) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=1-0.75\sin^2 2\alpha$；

7) $\dfrac{1+\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$；

8) $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos3\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$；

9) $\dfrac{1-\cos2\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$；

10) $\dfrac{2-\sin4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha}{\sin4\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$；

11) $\dfrac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos3\alpha}{\cos\alpha}=2$；

12) $\dfrac{1+\cos2\alpha}{\cos2\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos4\alpha}{\sin4\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$；

13) $\cos4\alpha+4\cos2\alpha+3=8\cos^4\alpha$。

33．解方程：

1) $\sin2x-\sin x=0$；　　2) $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}$；

3) $\cos^2x-\sin^2x=1$。

§4．半角三角函数

半角三角函数的公式可以用自变量α的函数来表示自变量$\dfrac{\alpha}{2}$的函数。

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,, \tag{3.13}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \tag{3.14}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha\neq(2k+1)\pi; \tag{3.15}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},\ \alpha\neq 2k\pi; \tag{3.16}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \alpha\neq(2k+1)\pi; \tag{3.17}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \begin{array}{l}\text{左边}\alpha\neq(2k+1)\pi,\\ \text{右边}\alpha\neq k\pi;\end{array} \tag{3.18}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \begin{array}{l}\text{左边}\alpha\neq 2k\pi,\\ \text{右边}\alpha\neq k\pi;\end{array} \tag{3.19}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\ \alpha\neq 2k\pi。 \tag{3.20}$$

在公式（3.13）和（3.14）中，根号前的符号取决于$\frac{\alpha}{2}$所在的象限。

在公式（3.15）和（3.16）中，根号前的符号与$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$的符号相同，即，如果$\frac{\alpha}{2}$为第Ⅰ或第Ⅲ象限的弧，根号前的符

号取正号，如果$\frac{\alpha}{2}$为第Ⅱ或第Ⅳ象限的弧，根号前的符号取负号。

公式（3.17）～（3.20）是用自变量α的三角函数给出有理表达式$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$，可用这些公式来代替公式（3.15）和（3.16）。

在等式（3.18）和（3.19）中，左边和右边具有不同的定义域。在等式（3.18）中，左边的定义域为$\alpha\neq 2\pi$（k+1），右边的定义域为$\alpha\neq k\pi$。在等式（3.19）中，左边的定义域为$\alpha\neq 2k\pi$，右边的定义域为$\alpha\neq k\pi$。在应用公式（3.18）和（3.19）解三角方程时，要注意这两个公式的不一致性。

按照下列公式，用半角的正切可以表示这个角的一切函数：

$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq(2k+1)\pi; \qquad (3.21)$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq(2k+1)\pi; \qquad (3.22)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq(2k+1)\pi,$$

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi; \qquad (3.23)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq k\pi。\qquad (3.24)$$

34．已知：$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，计 算 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$和 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$。

解：按公式（3.14）和（3.15）求得：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\frac{1}{2};\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

（由于$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以根号前取正号）。继续求得：

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}。$$

35 依下列条件计算$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$和$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$：

1）如果$\cos\alpha=-\frac{7}{25}$，且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$；

2）如果 $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$，且$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$；

3）如果$\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}$，且$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$。

36．1）如果 $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$，且 $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$，计算

$\cos\frac{\alpha}{2}$；

2）如果 $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{5}{12}$，且 $3\pi<\alpha<\frac{7\pi}{2}$，计算$\sin\frac{\alpha}{2}$；

3）如果 $\sin\alpha=-\frac{1}{6}$，且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，计算$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$。

37．依下列条件计算$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$：

1）$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$；

2）$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$；

3）$\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{2}$，且$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$。

解：1）求出$\cos\alpha=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$。按照公式

(3.17) 我们得到：$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}:\ (1-\frac{3}{5})=2$。

2) 求出$\sin\alpha=-\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$。按照公式

(3.17) 我们得到：$tg\frac{\alpha}{2}=(-\frac{3}{5}):(1-\frac{4}{5})=-3$。

3) 我们先计算$\sin\alpha$和$\cos\alpha$：

$$\sin\alpha=-\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2}}$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2}}=-\frac{1}{3}。$$

按照公式 (3.17) 我们得到：$tg\frac{\alpha}{2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}:(1-\frac{1}{3})$

$=-\sqrt{2}$。

38．证明恒等式：

1) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$；　2) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$。

证：1)用$\frac{\alpha}{2}$来代换公式$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$中的$\alpha$，我们得到

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1，或1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}。$$

2）类似地在公式$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$中，用$\frac{\alpha}{2}$来代换自变量$\alpha$，我们得到

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}，或1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}。$$

39．化简下列各式：

1）$1-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4x}{3}\right)$；　2）$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)-1$；

3）$1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5x}{2}\right)$；4）$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-1$。

40．化简下列各式： 1）$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$；2）$\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$。

解： 1）$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2};$$

2）$$\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha。$$

41．化简：

1）$1-\cos 40°$；2）$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$；3）$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$。

4) $\mathrm{ctg}\alpha\ (1-\cos 2\alpha)$；5) $\mathrm{tg}\alpha\ (1+\cos 2\alpha)$；

6) $(\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha})\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$。

42．证明恒等式：

1) $\frac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}=\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}$；2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$；

3) $\frac{\cos\alpha-\cos 2\alpha-1}{\sin\alpha-\sin 2\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$；4) $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$

$=\mathrm{ctg}\ (\frac{\pi}{4}+\alpha)$。

43．计算：

1) 已知$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=2$，求$\sin\alpha$；

2) 已知$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=3$，求$\cos\alpha$；

3) 已知$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}$，求$\mathrm{tg}\alpha$；

4) 已知$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{2}$，求$\mathrm{ctg}\alpha$；

5) 已知$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=3$，求$\frac{5\cos\alpha-3}{10\sin\alpha+1}$。

解：利用公式（3.21）～（3.24），得：

1）$\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\times2}{1+2^2}=\dfrac{4}{5}$；

2）$\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-3^2}{1+3^2}=-\dfrac{4}{5}$；

3）$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2}=-\sqrt{3}$；

4）$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-(-\sqrt{2})^2}{2\cdot(-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

5）$\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-9}{1+9}=-\dfrac{4}{5}$；

$\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{6}{1+9}=\dfrac{3}{5}$；

$\dfrac{5\cos\alpha-3}{10\sin\alpha+1}=\dfrac{5\cdot(-\dfrac{4}{5})-3}{10\cdot(\dfrac{3}{5})+1}=-1$。

44. 1) 如果 $\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$，计算$\sin\alpha$；

2) 如果 $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，计算$\cos\alpha$；

3) 如果 $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，计算$\mathrm{tg}\alpha$；

4) 如果 $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=2$，计算$\frac{5\cos\alpha+4}{10\sin\alpha-1}$。

45. 解方程：

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)-\cos(\pi+x)+1=0$；

2) $\sin x+\cos x=1$；

3) $3\sin x+4\cos x=4$。

解：1) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)-\cos(\pi+x)+1=0\right)\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow\left(\cos\frac{x}{2}+\cos x+1=0\right)\Longleftrightarrow\left(\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=0\right)\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow\left(\cos\frac{x}{2}\left(1+2\cos\frac{x}{2}\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(\cos\frac{x}{2}=0\right.$，或

$\left.1+2\cos\frac{x}{2}=0\right)$；

$\cos\frac{x}{2}=0$，$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$x=(2k+1)\pi$；

$$1+2\cos\frac{x}{2}=0,\ \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2},\ \frac{x}{2}=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,$$

$$x=\pm\frac{4\pi}{3}+4k\pi,\ x=(3k\pm1)\frac{4\pi}{3}。$$

方程的解集为：$\left\{(2k+1)\pi;\ x=\frac{4\pi}{3}\right.$

$\left.(3k\pm1)\ \middle|\ k\in Z\right\}$。

2) $(\sin x+\cos x=1)\Longleftrightarrow(\sin x=1-\cos x)\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2})\Longleftrightarrow(2\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}$

$-\sin\frac{x}{2})=0)\Longleftrightarrow(\sin\frac{x}{2}=0$ 或 $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0)\Longleftrightarrow$

$(\sin\frac{x}{2}=0$ 或 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1)$；

$$\sin\frac{x}{2}=0,\ \frac{x}{2}=k\pi,\ x=2k\pi;$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi。$$

方程的解集为：$\left\{2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\ \middle|\ k\in Z\right\}$。

3) 利用 $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 来表示 $\sin x$ 和 $\cos x$，则有

$\cos x = \frac{2z}{1+z^2}$，$\cos x = \frac{1 - z^2}{1+z^2}$，代入原方程有：

$$\frac{6z}{1+z^2} + \frac{4-4z^2}{1+z^2} = 4,\ 4z^2 - 3z = 0,\ z_1 = 0,$$

$$z^2 = \frac{3}{4}。$$

原方程等价于方程 $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$和 $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$，由此得

$\frac{x}{2} = k\pi$和$\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4} + k\pi$。于是，方程的解集为：

$$\left\{ 2k\pi;\ 2\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + 2k\pi \mid k \in Z \right\}。$$

46．解方程：1）$1 - \cos x = \sin\frac{x}{2}$；

2）$1 + \cos x = \cos\frac{x}{2}$；　3）$1 + \cos x = \sin x$。

§5．综　合　题

47．计算：

1）已知 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$，且$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，计算 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 和$\operatorname{tg} 2\alpha$；

2）已知$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，且$\alpha\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，计算$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$和$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$；

3）已知$\sin\alpha=-\frac{24}{25}$，且$\alpha\in(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi)$，计算$\sin\frac{\alpha}{4}$，$\cos\frac{\alpha}{4}$和$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$。

48．化简：

1）$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$； 2）$\frac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}$；

3）$\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$；　　4）$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$。

49．计算：

1）$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$； 2）$\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$；

3）$\cos20°\cos40°\cos80°$。

50．计算：1）$\sin(2\arcsin\frac{40}{41})$；

2）$\cos(\arccos\frac{2}{3})$；　3）$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{7}{25})$。

51．化简：

1) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha}$； 2) $\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}$；

3) $2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\sin2\alpha$；

4) $\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{1-\sin\alpha}}-\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{1+\sin\alpha}}$，$\alpha\in(0, \pi)$。

52．证明恒等式：

1) $\frac{1-\sin2\alpha-\cos2\alpha}{1+\sin2\alpha+\cos2\alpha}=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\alpha)$；

2) $\frac{1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha}{\sin2\alpha+2\sin\alpha\cos2\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$；

3) $\frac{\sin^3\alpha+\sin3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos^3\alpha-\cos3\alpha}{\cos\alpha}=3$；

4) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos2\alpha$；

5) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{12}=4$；

6) $\cos^3\alpha\cos3\alpha+\sin^3\alpha\sin3\alpha=\cos^3 2\alpha$。

53．证明恒等式：

1) $\frac{\mathrm{tg}^2(\pi-\alpha)-\mathrm{tg}^2\frac{7\pi}{3}}{\mathrm{ctg}^2(1.5\pi+\alpha)-\mathrm{tg}^2\frac{5\pi}{6}}=3\mathrm{tg}3\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha$；

2) $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\mathrm{tg}(\alpha-\frac{\pi}{4})=2\mathrm{tg}2\alpha$；

3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{3}}=3\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{ctg}\alpha$；

4) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$

$=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

5) $\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)+\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)=2\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$。

54. 解方程：

1) $\sin x\cos x=\dfrac{1}{4}$；　　2) $\cos^2 x-\sin^2 x=-\dfrac{1}{2}$；

3) $\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x=2$；　　4) $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{3}+x)\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{3}-x)=1$；

5) $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x=0$；　　6) $1+\cos x=2\cos\dfrac{x}{2}$；

7) $1-\cos x=2\sin\dfrac{x}{2}$；　　8) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$。

小 测 验

第一组

1) 如果$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，且$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，计算$\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$和$\operatorname{tg}2\alpha$。

第二组

1) 如果$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，且$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，计算$\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$和$\operatorname{tg}2\alpha$。

2）如果$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，且$\alpha\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，计算$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$和$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$。

3）证明恒等式：

$$\frac{2\sin\alpha+\sin2\alpha}{2\sin\alpha-\sin2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha。$$

4）证明恒等式：

$$4\sin20^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ=\sin80^\circ$$

5）解方程：

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=1。$$

2）如果$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，计算$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$和$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$。

3）证明恒等式：

$$\frac{1+\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\alpha)。$$

4）证明恒等式：

$$8\sin10^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ=1。$$

5）解方程：

$$1-\cos x=\sin x\sin\frac{x}{2}。$$

§6． 三角函数的积化和差

将三角函数的积化为三角函数的和（或差），可采用下列公式：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]; \quad (3.25)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]; \quad (3.26)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]。\quad (3.27)$$

55．把下列各式化为和或差的形式：

1） $\sin5x\sin3x$；　2） $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}$。

解：1）按照公式（3.27），得：

$$\sin5x\sin3x=\frac{1}{2}[\cos(5x-3x)-\cos(5x+3x)]$$

$$=\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\cos8x。$$

2）利用公式（3.26）两次，可得：

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}=(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4})\cos\frac{x}{3}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4})\cdot\cos\frac{x}{3}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{3})$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\cos\frac{13x}{12}+\cos\frac{5x}{12})+\frac{1}{2}(\cos\frac{7x}{12}+\cos\frac{x}{12})]$$

$$=\frac{1}{4}\cos\frac{13x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{5x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{7x}{12}+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{12}。$$

56．把下列各式化为和或差的形式：

1） $\cos7x\cos5x$；2） $\sin11x\sin x$；

3） $\sin5x\cos2x$；4） $\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$；

5） $\cos(\alpha+\beta)\cos(2\alpha+\beta)$；

6） $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$。

57．把下列各式化为和或差的形式：

1）$\sin(\frac{\pi}{4}+x)\sin(\frac{\pi}{4}-x)$；

2）$4\cos(\frac{\pi}{12}-x)\cos(\frac{\pi}{12}+x)$；

3）$4\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{12}-x)$；

4）$4\cos(\frac{\pi}{6}+x)\sin(\frac{\pi}{3}-x)$。

58．把下列三角函数式表示为一次和的形式：

1）$\sin^2x$；2）$\cos^2x$；3）$\sin^3x$；4）$\cos^3x$；5）$\cos^5x$。

解：1）$\sin^2x=\sin x\cdot\sin x=\frac{1}{2}(\cos 0-\cos 2x)$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x;$$

2）$\cos^2x=\cos x\cdot\cos x=\frac{1}{2}(\cos 0+\cos 2x)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x;$$

3）$\sin^3x=\sin^2x\cdot\sin x=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x)\sin x$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cos 2x$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin x$$

$$=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x。$$

由此得到三倍角的正弦函数的公式：

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x。$$

4）$\cos^3 x=\cos^2 x\cdot\cos x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cos x$

$$=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}(\cos 3x+\cos x)$$

$$=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x$$

$$=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x。$$

由此得到三倍角的余弦函数的公式：

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x。$$

5）$\cos^5 x=\cos^3 x\cdot\cos^2 x$

$$=\left(\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$

$$=\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos x\cos 2x$$

$$+\frac{1}{8}\cos 3x\cos 2x$$

$$=\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\cos 3x+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)$$

$$+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)$$

$$=\frac{5}{8}\cos x+\frac{5}{16}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 5x。$$

59．将下列三角函数式化为一次和或差的形式：

1）$\sin^4 x$；　2）$\cos^4 x$；　3）$\sin x^5$。

§7．三角函数的和差化积

1．基本公式

将三角函数的和或差化为三角函数的积（化为便于取对数的形式），可利用下列公式：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.28)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.29)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.30)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}; \qquad (3.31)$$

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

$$\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi; \qquad (3.32)$$

$$\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

$$\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi; \qquad (3.33)$$

此外，也常用到下列公式：

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2};\qquad(3.34)$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2};\qquad(3.35)$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);\qquad(3.36)$$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).\qquad(3.37)$$

2. 引进辅助角来进行和差化积

对任意数a，等式$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}a)=a$都成立。在$|a|\leqslant 1$时，等式$\sin(\arcsin a)=a$和$\cos(\arccos a)=a$也都成立。因此，已知数$a$可看作是某个自变量（辅助角）的三角函数值。这样，自然能够将任何两数的代数和表示为两个三角函数值的代数和。于是就可使用三角函数的和差化积公式。

3. 同名三角函数相等的条件

两个自变量的正弦相等的充分必要条件为：

$$x+y=(2k+1)\pi,\ 或\ x-y=2k\pi,\ k\in Z。$$

两个自变量的余弦相等的充分必要条件为：

$$x+y=2k\pi,\ 或\ x-y=2k\pi,\ k\in Z。$$

两个自变量的正切相等的充分必要条件为：1）已知自变量中每一个的正切都存在；2）$x-y=k\pi$，$k\in Z$。

60. 把下列各式化为积的形式：

1）$\sin40°+\sin20°$；　2）$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{7\pi}{10}$；

3）$\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{7}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{7}$；　4）$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$。

解：1）按照公式（3.28）我们求得：

$$\sin 40^\circ+\sin 20^\circ=2\sin\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ-20^\circ}{2}$$

$$=2\sin 30^\circ\cos 10^\circ=2.\ \frac{1}{2}\cos 10^\circ=\cos 10^\circ;$$

2）按照公式（3.31）我们求得：

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{7\pi}{10}=2\sin\frac{9\pi}{20}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=2\sin\frac{9\pi}{20}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{20};$$

3）先用正切表示余切，再利用公式（3.33），可得：

$$\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{7}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{7}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{7}\right)-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=\mathrm{tg}\frac{3\pi}{14}-\mathrm{tg}\frac{5\pi}{14}$$

$$=-\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}}。$$

4）利用公式（3.34），（3.35）和（3.30）我们得到：

$$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{2(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{2(\alpha-\beta)}{2}$$

$$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)。$$

61. 将下列各式化为积的形式：

1) $\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}$； 2) $\cos\beta-\sin\alpha$；

3) $2\cos^2\alpha-\sin2\alpha$； 4) $\cos20°+\sin50°$；

5) $\operatorname{tg}25°-\operatorname{ctg}75°$； 6) $\sin^2 5\alpha-\sin^2 3\alpha$。

62. 将下式化为积的形式：

$\sin2\alpha\cos3\alpha-2\sin^2\alpha\sin3\alpha$。

解：$\sin2\alpha\cos3\alpha-2\sin^2\alpha\sin3\alpha$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos3\alpha-2\sin^2\alpha\sin3\alpha$$

$$=2\sin\alpha(\cos\alpha\cos3\alpha-\sin\alpha\sin3\alpha)$$

$$=2\sin\alpha\cos4\alpha。$$

63. 将下列各式化为积的形式：

1) $\sin\alpha\cos\beta+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta$；

2) $\sin10°+2\sin5°\cos15°+\cos50°$。

64. 将下列各式化为积的形式：

1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$； 2) $\sin x+\sin2x+\sin3x$；

3) $\sin A+\sin B+\sin C$，其中$A+B+C=\pi$；

4) $\sin20°+\sin34°+\sin24°+\sin30°$。

解：1) 按照公式（3.34）将$1+\cos\alpha$化为积的形式，并对$\sin\alpha$使用二倍角公式，我们得到：

$$1+\cos\alpha+\sin\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)。$$

2）将前两项（也可以对任意两项）化为积的形式，将第3项利用二倍角公式进行变换，我们得到：

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$= 2\sin\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{3x}{2}\cdot 2\cos x\cos\frac{x}{2}$$

$$= 4\sin\frac{3x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}。$$

3）由于$C=\pi-(A+B)$，那么 $\sin C=\sin(\pi-(A+B))=\sin(A+B)$。所以，

$$\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\sin B+\sin(A+B)$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}。$$

然而$A+B+C=\pi$，即$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$。这就是说，$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$，由此得：

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}。$$

4）注意到$20°+34°=24°+30°$，并按照公式（3.28）和（3.30）依次进行变换：

$$\begin{aligned}&\sin 20°+\sin 34°+\sin 24°+\sin 30°\\&=2\sin 27°\cos 7°+2\sin 27°\cos 3°\\&=2\sin 27°\ (\cos 7°+\cos 3°)\\&=4\sin 27°\cos 5°\cos 2°。\end{aligned}$$

65．将下列各式化为积的形式：

1）$\sin 16°+\sin 26°-\sin 42°$；

2）$\sin A+\sin B+\sin\dfrac{A+B}{2}$；

3）$\sin\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{3\alpha}{2}+\cos\alpha$；

4）$\sin A+\cos B+\cos C$，其中$A+B+C=\pi$；

5）$1+\cos A+\cos B+\cos C$，其中$A+B+C=\pi$；

6）$\sin 25°+\sin 37°+\sin 27°+\sin 35°$。

66．证明三角形的内角A、B和C之间有下列关系：

1）$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$；

2）$\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$；

3）$\sin A+\cos B-\cos C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\ (\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{B}{2})$

$\times \sin(\frac{\pi}{4}+\frac{C}{2})$；

4) $1-\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$；

5) $\sin(A+B-C)+\sin(B+C-A)$
$+\sin(C+A-B)=4\sin A\sin B\sin C$；

6) $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$；

7) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$； *

8) $\operatorname{tg}2A+\operatorname{tg}2B+\operatorname{tg}2C=\operatorname{tg}2A\operatorname{tg}2B\operatorname{tg}2C$； **

9) $\operatorname{tg}A-\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C$； *

10) $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}-\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$。

67. 证明恒等式：

1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$；

2) $\sin\alpha+\cos\alpha-1=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$；

3) $2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$。

68. 引入辅助角，将下列各式化为积的形式：

1) $\sqrt{2}\sin\alpha+1$；　2) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha$；　3) $4\cos^2\alpha-1$；

---

* 译者注：7、9两题对非直角三角形才成立；

** 译者注：本题对没有一个内角是45°或没有内角是135°的三角形才成立。

4) $a+b$；　5) a^2+b^2。

解：1) $\sqrt{2}\sin\alpha+1=\sqrt{2}\ (\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$=\sqrt{2}(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{4})$$

$$=2\sqrt{2}\sin\ (\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2})\ \cos\ (\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8})\ ;$$

2) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha}$

$$=\frac{2\sin\ (\frac{\pi}{3}+\alpha)}{\cos\alpha};$$

3) $4\cos^2\alpha-1=4\ (\cos^2\alpha-\frac{1}{4})=4(\cos\alpha+\frac{1}{2})(\cos\alpha$

$$-\frac{1}{2})\ =4\ (\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3})(\cos\alpha\ -\cos\frac{\pi}{3})$$

$$=4\times 2\cos\ (\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6})\ \cos\ (\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6})\ 2\sin\ (\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6})$$

$$\times\sin\ (\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2})=4\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\ \sin\ (\frac{\pi}{3}-\alpha)\ ;$$

4) $a+b=a\ (1+\frac{b}{a})=a(1+\operatorname{tg}\varphi)\ =a\ (\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\varphi)$

$$=\frac{a\sin\ (\frac{\pi}{4}+\varphi)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi}=\frac{a\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)}{\cos\varphi},$$

其中$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$；

5）$a^2+b^2=a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=a\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi\right)=\frac{a^2}{\cos^2\varphi}$，

其中$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$。

69．引入辅助角，将下列各式化为积的形式：

1）$0.5+\cos\alpha$；　2）$1-2\cos\alpha$；　3）$1-2\sin\alpha$；

4）$1+2\sin\alpha$；　5）$1+\operatorname{tg}\alpha$；　6）$1-\operatorname{tg}^2\alpha$；

7）$1-\operatorname{ctg}^2\alpha$；　8）$\sqrt{3}+2\cos\alpha$；　9）$\sin^2\alpha-0.75$；

10）$1-\sqrt{2}\sin\alpha$；　11）$\frac{a-b}{a+b}$；

12）$\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$。

70．将$4\sin\alpha+3\cos\alpha$化为积的形式。

解：将已知表达式写成下列形式：

$$4\sin\alpha+3\cos\alpha=\sqrt{4^2+3^2}\left(\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}\sin\alpha\right.$$

$$\left.+\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}\cos\alpha\right)=5\left(\frac{4}{5}\sin\alpha+\frac{3}{5}\cos\alpha\right)。$$

由于$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$，那么可求得这样的一个角

φ，使$\frac{4}{5}=\cos\varphi$，$\frac{3}{5}=\sin\varphi$。由此求得：

$$4\sin\alpha+3\cos\alpha=5\ (\sin\alpha\cos\varphi+\sin\varphi\cos\alpha)$$
$$=5\sin\ (\alpha+\varphi);$$

其中 $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{3}{4}$。于是，

$$4\sin\alpha+3\cos\alpha=5\sin(\alpha+\operatorname{arctg}\frac{3}{4})\ 。$$

71．将下列各式化为积的形式：

1）$\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$；　2）$4\sin\alpha-3\cos\alpha$；

3）$2\sin\alpha-\sqrt{5}\cos\alpha$。

72．用引入辅助角的方法解三角方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$。

解：将已知方程的左边化为积的形式：

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\ (\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$$

$$=2\sin\ (x+\operatorname{arctg}\sqrt{3})\ =2\sin\ (\ x+\frac{\pi}{3})\ 。$$

这样就有

$$(\sin\ (x+\frac{\pi}{3})\ =1)\iff(x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi)$$

$$\iff(x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi)\iff(x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z)\ 。$$

73．解方程：

1）$\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$；2）$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$；

3）$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$。

74．解方程：

1）$\sin 4x=\sin 3x$；2）$\cos 5x=\cos\ (x-\frac{\pi}{4})$；

3） $\cos x=\sin 3x$； 4） $\mathrm{tg}5x=\mathrm{tg}x$。

解：利用同名三角函数相等的条件可得：

1） $(\sin 4x=\sin 3x) \Longleftrightarrow (4x+3x=(2k+1)\pi$，或 $4x-3x=2k\pi) \Longleftrightarrow (7x=(2k+1)\pi$ 或 $x=2k\pi$；$k\in Z)$。

因此，已知方程的解集为：

$$\left\{(2k+1)\frac{\pi}{7};2k\pi \mid k\in Z\right\}。$$

2） $(\cos 5x=\cos(x-\frac{\pi}{4})) \Longleftrightarrow (5x+x-\frac{\pi}{4}=2k\pi$ 或 $5x-x+\frac{\pi}{4}=2k\pi) \Longleftrightarrow (6x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $4x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$；$k\in Z)$。

因而，方程的解集为：

$$\left\{\frac{\pi}{24}(8k+1);\frac{\pi}{16}(8k-1) \mid k\in Z\right\}.$$

3） $(\cos x=\sin 3x) \Longleftrightarrow (\cos x=\cos(\frac{\pi}{2}-3x))$

$\Longleftrightarrow (x+\frac{\pi}{2}-3x=2k\pi$ 或 $x-\frac{\pi}{2}+3x=2k\pi)$

$\Longleftrightarrow (-2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 或 $4x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$；$k\in Z)$。

方程的解集为：$\left\{\frac{\pi}{4}(4k+1);\frac{\pi}{8}(4k+1) \mid k\in Z\right\}$。

4） $(5x-x=k\pi) \Longleftrightarrow (4x=k\pi) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow\left(x=\frac{k\pi}{4}\right)$。

∴需要从方程的解集中除去使方程左右两边不存在的那些自变量x的值，即具有$\frac{\pi}{2}(2k+1)$形式的值。如果$\frac{k}{2}$为奇数：$\frac{k}{2}=2n+1$，即 $k=4n+2$，那么可以得到 $x=\frac{k\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{2}$。因此，形式为$\frac{k\pi}{4}$ $(k\neq 4n+2)$ 的解集满足方程。

75. 解方程：

1) $\sin 5x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)$；

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-2\pi\right)$；

3) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$；

4) $\cos(x-70^\circ)-\sin(x+70^\circ)=0$。

§8. 简 谐 振 动

1. 基本概念

如果点M沿着半径为R的圆周（图23）以固定的角速度ω进行运动，那么点M在Y轴上的射影P沿着这个轴按照下述规律作振动：

$$y=R\sin(\omega t+\theta)。\tag{3.38}$$

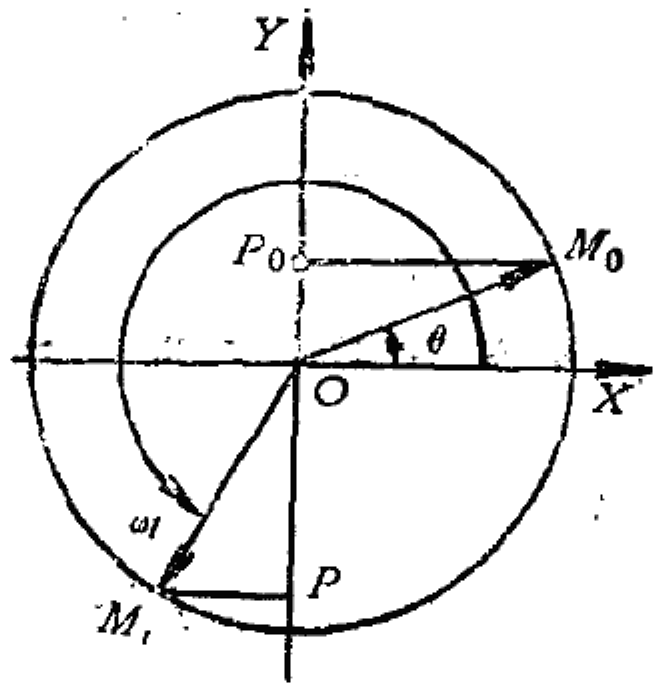


图 23

点P的运动称为简谐振动。R的值（振幅）表示点P振动离开坐标原点的最大距离；ω表示点M的角速度，即点M每秒钟转过的弧度；t表示点M由位置M_0移到M_t所用的时间（秒）；θ表示振动的初相。

当$t=0$时，半径向量$\overrightarrow{OM_0}$与X轴组成的角为θ，经过t秒钟后，半径向量转过的角度为ωt，这时半径向量与X轴所成的角为$\omega t+\theta$。因此，沿着半径为R的圆周以角速度ω进行匀速运动的点的射影作振幅为R和初相为θ的简谐振动。

当点M沿着圆周旋转一周时，点P就经过自己的所有相位，它们用的时间T称为简谐振动的周期，即T是函数$y=R\sin(\omega t+\theta)$的周期。由于点P在时间T内完成一个周期，即扫过弧度数为2π的弧，那么在单位时间内点P扫过的角ω就是$\frac{2\pi}{T}$弧度。因此，角速度为：

$$\omega=\frac{2\pi}{T}。\tag{3.39}$$

由此可得：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}。\tag{3.40}$$

振动周期的倒导值，即$\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，称为振动的频率。振

动频率*就是振动点在秒钟内振动的次数n：

$$T=\frac{1}{n}。\tag{3.41}$$

2. 两个具有相同周期的简谐振动的迭加

设两个具有相同周期的简谐振动有下面的表达式：

$$y_1=R_1\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta_1\right)\ 和$$

$$y_2=R_2\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta_2\right),$$

那么在已知的简谐振动迭加时仍得简谐振动：

$$R_1\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta_1\right)+R_1\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta_2\right)$$

$$=R\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta\right),$$

振幅R和初相θ同被迭加的振动的振幅和初相之间的关系表示为下式：

$$R=\sqrt{R_1^2+R_2^2+2R_1R_2\cos(\theta_1-\theta_2)},$$

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{R_1\sin\theta_1+R_2\sin\theta_2}{R_1\cos\theta_1+R_2\cos\theta_2}。$$

76. 已知振幅等于10，周期等于0.5秒，初相等于1.5，试建立简谐振动的方程。

解：按照公式（3.39）求得：

$$\omega=\frac{2\pi}{0.5}=4\pi,$$

---

* 有时用频率表示ω的值，它表示点P在2π秒内振动的次数。

将$R=10$，$\theta=1.5$，$\omega=4\pi$代入公式（3.38），我们得到：

$$y=10\sin(4\pi t+1.5)。$$

77．已知：振幅等于5，振动频率等于3，初相等于0.8，试建立简谐振动的方程。

78．求下列函数的周期，振幅和初相：

1）$y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；2）$y=-3\sin\frac{x}{3}$；

3）$y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$。

解：1）这里$R=3$，$\omega=2$，$\theta=-\frac{\pi}{6}$。周期T可按关系式（3.40）求得，即$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$。

2）这里$R=|-3|=3$，$\omega=\frac{1}{3}$，$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$。为了计算初相，我们将已知函数表示为$y=3\sin\left(\frac{x}{3}+\pi\right)$，由此得$\theta=\pi$。

3）将已知函数变换成下面的形式：

$$y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right)$$

$$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)。$$

由此得$\theta=\frac{\pi}{4}$，$R=1$，$\omega=2$，$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$。

79. 求下列函数的周期、振幅和初相：

1) $y=2\sin(3x+\frac{\pi}{3})$； 2) $y=\frac{1}{3}\sin(\pi x-\frac{\pi}{4})$．

3) $y=\sin(x-5)$。

80. 质量为m的质点按照$s=5\sin(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6})$的规律作简谐振动，求在时刻$t=0$时这个质点完成这个运动的作用力$F$。

81. 将下列表达式化为$R\sin(\omega t+\theta)$的形式：

1) $12\sin 2t+5\cos 2t$；

2) $8\sin(5x+\frac{\pi}{6})-15\cos(5x+\frac{\pi}{6})$(参看258题)。

82. 求下列简谐振动和的振幅和初相：

1) $y_1=3\sin\frac{t}{2}$和$y_2=5\sin\frac{t}{2}$；

2) $y_1=2\sin 2t$和$y_2=2\sin(2t+\frac{\pi}{3})$；

3) $y_1=\sqrt{2}\sin 5t$和$y_2=\sqrt{2}\cos 5t$。

§9. 综合题

83. 把下列三角函数的积化为一次的和差形式：

1) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$； 2) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{5\alpha}{2}$；

3) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{5\alpha}{2}$。

84. 利用积化和差的方法化简：

1) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$；

2) $\mathrm{tg}20^\circ \mathrm{tg}40^\circ \mathrm{tg}60^\circ \mathrm{tg}80^\circ$。

85. 解方程：

1) $\sin(x+\frac{\pi}{3})\cos(x-\frac{\pi}{6}) = 1$；

2) $\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos(x-\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{4}$。

86. 证明恒等式：

1) $\sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}(\cos\alpha-\cos3\alpha)$；

2) $\sin^3\alpha\cos\alpha = \frac{1}{8}(2\sin2\alpha-\sin4\alpha)$；

3) $\sin^2\alpha\cos^3\alpha = \frac{1}{16}(2\cos\alpha-\cos3\alpha-\cos5\alpha)$；

4) $\sin^3\alpha\cos^3\alpha = \frac{1}{32}(3\sin2\alpha-\sin6\alpha)$。

87. 证明恒等式：

1) $4\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\alpha = \sin2\alpha+\sin4\alpha-\sin6\alpha$；

2) $4\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \cos2\alpha+\cos2\beta-\cos2(\alpha+\beta)-1$；

3) $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)\cos2\alpha = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos4\alpha$。

88. 将下列各式化为积的形式：

1) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin5\alpha$；

2) $\sin3\alpha+\sin2\alpha+2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$。

89. 证明恒等式：

1) $\frac{\sin\alpha-\sin2\alpha-\sin4\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha-\cos2\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha}=\mathrm{tg}3\alpha$；

2) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha-\cos7\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$；

3) $\sin47°+\sin61°-\sin11°-\sin25°=\cos7°$；

4) $\frac{\sin80°-\sin70°}{\sin29°-\sin19°}=\frac{\cos20°-\cos50°}{\cos31°+\sin11°}$；

5) $\frac{\left(\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin2\alpha-\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{4}$；

6) $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

$$=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}。$$

90. 求下列函数值的集合：

1) $y=\sin x+\cos x$；

2) $y=3\sin x+\sqrt{3}\cos x$；

3) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$。

小 测 验

第一组

1）化简：

$\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ$。

2）证明恒等式：

$\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{4}\cos 50^\circ \cos 70^\circ$。

3）证明恒等式：

$1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$。

4）解方程：

$\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x$。

5）解方程：

$\sin 2x = \cos x - \cos 3x$。

第二组

1）化简：

$\cos 65^\circ + \sqrt{3}\sin 5^\circ + \sin 85^\circ$。

2）证明恒等式：

$\cos 10^\circ \sin 20^\circ \cos 70^\circ \sin 80^\circ = \cos^2 10^\circ \sin^2 20^\circ$。

3）证明恒等式：

$1 + \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$。

4）解方程：

$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$。

5）解方程：

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin 2x$。

第二篇　平面解析几何

第四章　平面上的向量

§1.　基本概念和定义

1.　位移

平面上到自身的映射如果保持点之间的距离不变，这种映射称为位移。

平面上的恒等的映射（用E表示）为最简单的位移，即平面上任意点到自身的映射：$E \cdot X = X$。

2.　方向，同向和反向射线

在同一条直线上的两条射线，如果其中一条包括在另一条射线中，则这两条射线称为同向射线（相同方向的射线）；如果其中一条不包含另一条，则称这两条射线为反向射线。

不在同一条直线上的两条射线，如果在分平面为两个半面的直线的同旁，且互相平行，则称它们为同向射线；如果它们在不同的半面内，那么它们称为反向射线。

平面上所有的与同一条射线同向的射线的集合称为平面的方向。

如果射线a_1和a_2同向，则可写为 $a_1 \uparrow \uparrow a_2$；如果它们反向，则可写为$a_1 \uparrow \downarrow a_2$。

3. 平移

平面上的所有点沿同方向移动相同的距离，这种平面到自身的映射称为平移。

平移是位移，平移时的射线变为同向射线。

恒等映射是么位移，即同时为旋转和平移。

4. 向量和向量的表示法

平面上每一点M映射到点M_1，使射线〔MM_1）和射线〔AB）同向，而且距离$|MM_1|$和$|AB|$相等，则这种平面的变换叫做不重合的点组（A，B）所确定的向量（平移），如图24。

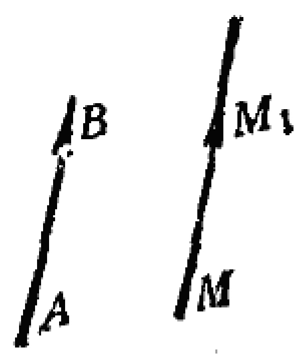


图 24

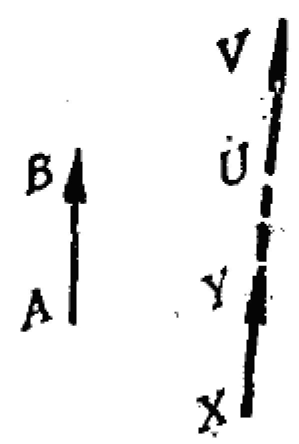


图 25

一对不重合的点（A，B）确定的向量用符号$\overrightarrow{AB}$表示。射线〔AB）确定的方向称为向量$\overrightarrow{AB}$的方向，而距离$|AB|$表示向量的长（或模）。点A称为向量$\overrightarrow{AB}$的起点，而点B称为终点。

为了表示向量，通常采用上面带有箭头的小写拉丁字母：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$。

向量$\boldsymbol{a}$的长（模）用$|\boldsymbol{a}|$或a表示。

不重合的有序点对（A，B）可确定由起点A到终点B的有向线段（图24）。显然，存在一个有向线段的无穷集合，其中的每一个向量都可借助于同一个向量来刻画（图25）。

作一条有向线段AB，使$\overline{AB}=\boldsymbol{a}$，这称为把向量$\boldsymbol{a}$由点$A$移开。

向量$\boldsymbol{a}$由一对已知的点A和B完全确定，那么向量$\boldsymbol{a}$表示由A到B的向量：$\boldsymbol{a}(A)=B$。

向量$\boldsymbol{a}$将射线上已知点x按原点至点x的方向移动原点至x的距离$|\boldsymbol{a}|$后得到点$\boldsymbol{a}(x)$。

向量$\boldsymbol{a}(A)=A$称为零向量，用$\overline{AA}$或$\boldsymbol{o}$表示。零向量的长度等于零。对于零向量我们不引入方向概念。

每一个不为零的向量的全部特征为自己的方向和长度。

如果向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o}$）同向，并且长度相等，即$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，那么它们相等（重合）：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

我们给出向量的下列性质：

1） 向量是位移；

2） 向量将射线映射成与它同向的射线，将直线映射成与它平行的直线。

1． 已知向量$\overline{AB}$和点M，求作点$\overline{AB}(M)$。

解：为了作出点$\overline{AB}(M)$，我们由点M引一条与向量$\overline{AB}$同向的射线，并且在上面截取线段MM_1，使$MM_1=|\overline{AB}|$，则$M_1=\overline{AB}(M)$为所求的点（图26）。

2． 已知向量$\boldsymbol{a}$和点A，求作点$A_1=\boldsymbol{a}(A)$。

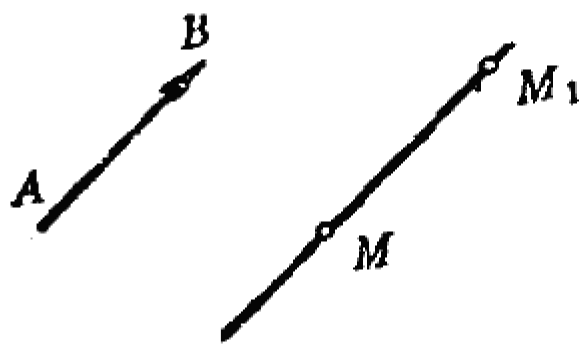


图 26

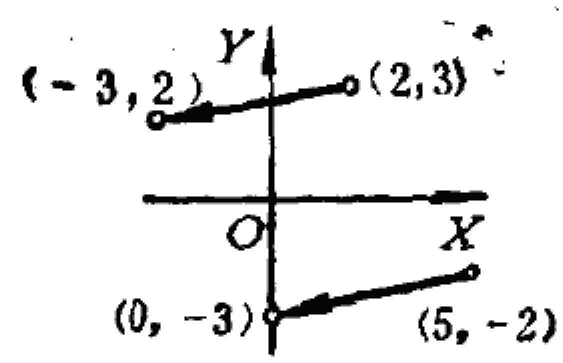


图 27

3. 某一平移将点（2,3）变为（−3,2）。在这样的平移下，点（5,−2）变成了怎样的点？

解：由于已知的平移将点（2,3）变成（−3,2），那么，这个平移将点（5,−2）变成的点的横坐标为在左边5个单位，纵坐标在点（5,−2）下面1个单位，即为点（0,−3）（图27）。

4. 某一平移将点（−4，1）变成（2,−3）。这个平移将点（5，5）变成怎样的点？

5. 平移将坐标原点变为（−3,−5），它将顶点为A（−2，6），B(4，8）和C(5，3）的三角形ABC变成了怎样的图形？

6. 已知平行四边形，试完成一个将对角线的交点映射到它的一个顶点的平移。

7. 已知两种图形：1）三角形；2）平行四边形，由这些图形的顶点组成所有有序点对能给出多少个向量？

8. 已知点对：1）（−2,−3)，（5，4)；2）（6,−2)，（13，5)；3）（−8,−5），指出哪些点对组成相等向量。

9. 已知平行四边形$ABCD$。O为对角线的交点，由点A，B，C，D和O组成的怎样的点对可确定相同的向量。

§ 2. 向量的加法和减法、向量的数乘

1. 向量的加法

一个平面到自身的映射是顺序完成映射$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的结果，即$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})A=\boldsymbol{b}[\boldsymbol{a}(A)]$，那么这样的映射称为向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的和（图28）。

两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的和被看作是这些向量的合成$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$，可写为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$。向量$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$称为封闭向量，而$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$称为组成向量。

由两个向量和的定义可得等式$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$。这个式子对于平面上任意三个点$A$，$B$和$C$都是正确的。这个等式称为三点法则或三角形法则。

为了作出两个已知向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的和，需要任取一点A，并由A作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，而后再由$B$作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，那么向量$\overrightarrow{AC}$就是所求的和：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$（图29）。这个作法称为三角形法则。

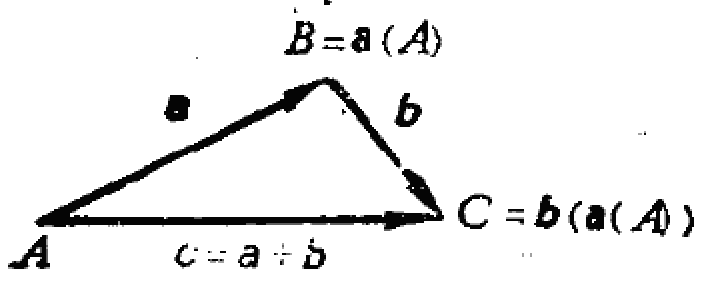


图 28

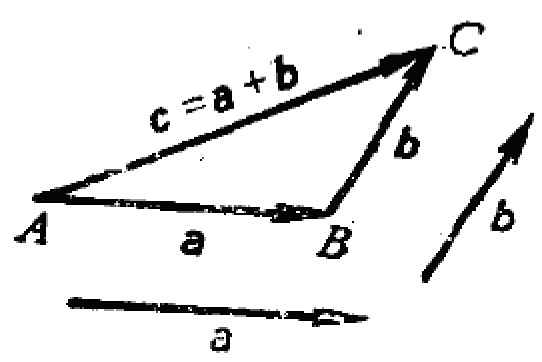


图 29

两个已知向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的和还可采用下述方法作出：由任意一点O（图30）作出两个向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$和$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，然

后作平行四边形$OACB$，那么向量$\overrightarrow{OC}$（这里OC为平行四边形的对角线）就是要求的和：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$。这个法则称为平行四边形法则。

为了作出n个已知向量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$的和，需要由任意一点$O$作向量$\boldsymbol{a}_1$，而后由向量$\boldsymbol{a}_1$的终点作$\boldsymbol{a}_2\cdots$，最后由向量$\boldsymbol{a}_{n-1}$的终点作向量$\boldsymbol{a}_n$。那么，以向量$\boldsymbol{a}_1$的起点为起点，以向量$\boldsymbol{a}_n$的终点为终点的向量就是要求的和：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$（图31）。

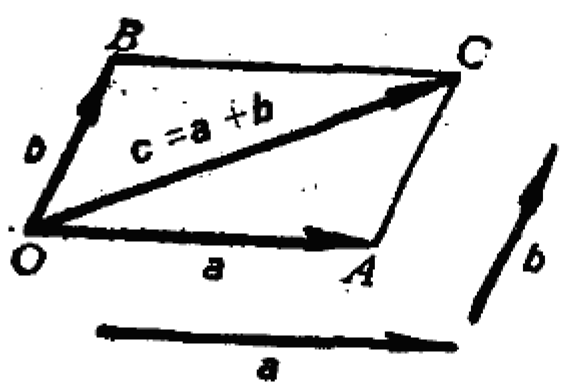


图 30

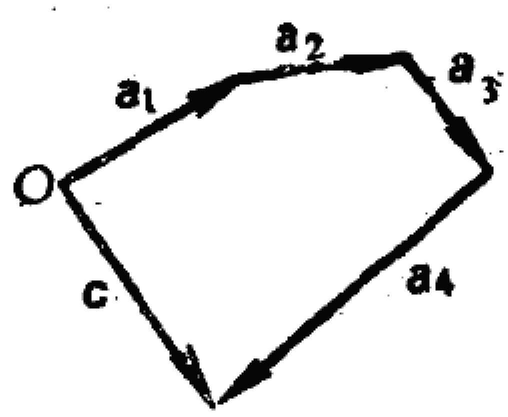


图 31

我们指出向量和的下列性质：

1°. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$（零向量的吸收律）。

2°. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（交换律或互换律）。

3°. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（结合律或缔合律）。

2. 向量的减法

如果两个向量的和等于零向量，那么这两个向量称为相反的向量，向量$\boldsymbol{a}$的相反向量用$-\boldsymbol{a}$表示，于是有$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$。

不为零的相反的向量具有等长且方向相反（图32）。

如果$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$，那么向量$\boldsymbol{c}$称为向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的差。

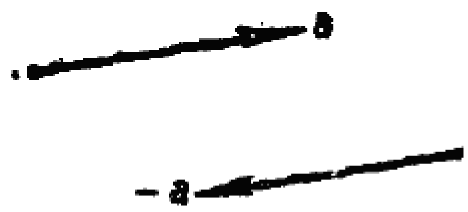


图 32

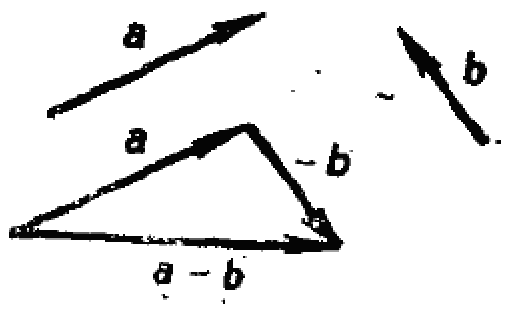


图 33

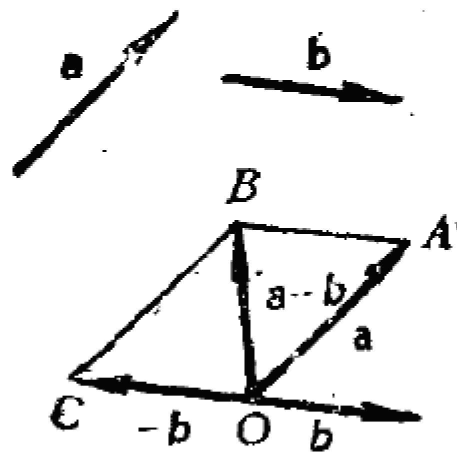


图 34

为了由向量$\boldsymbol{a}$减去向量$\boldsymbol{b}$，我们可将向量$\boldsymbol{b}$的反向量同 向量$\boldsymbol{a}$相加，即$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ （图33）。

向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的差的作法还可采用下述方法：由任意一点O作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$和$\overrightarrow{OC}=-\boldsymbol{b}$（向量$\boldsymbol{b}$ 的反向量），进而作平行四边形$OABC$，则得向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图34）。

3. 向量的数乘

如果两个向量的方向相同或相反，则这两个向量称为共线向量。

零向量可认为是同任何一个不为零的向量共线的。

向量$\boldsymbol{a}$同数m的乘积是一个向量，如果$m>0$，其方向与向量$\boldsymbol{a}$同向；如果$m<0$，其方向与向量$\boldsymbol{a}$反向。这个向量的长度等于向量$\boldsymbol{a}$的长度与数m的模的乘积。

向量$\boldsymbol{a}$与数m的乘积用$m\boldsymbol{a}$表示。对于任意的m和$\boldsymbol{a}$，向量$m\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{a}$共线，且有$|m\boldsymbol{a}|=|m|\cdot|\boldsymbol{a}|$。

我们指出向量的数乘有下列性质：

1°. $m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a}$（结合律）。

2°. $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}=(m+n)\boldsymbol{a}$（第一分配律或分配律）。

3°. $m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$（第二分配律）。

4°. $0\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$（零向量的吸收律和零向量定律）。

4. 两个向量之间的角

两个不为零的向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的方向之间的角，称为这两个向量之间的角，即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$，这里$\varphi\in[0,180°]$。

特殊情况：

1） 如果$\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$，那么$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$。

2） 如果$\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$，那么$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=180°$。

10．根据已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，作出向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$。

11．要使向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$能组成三角形，那么它们应满足怎样的条件？

12．已知a，b，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，求向量$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的模。

解：根据余弦定理有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C。$$

由于 $\cos C=\cos[180°-(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})]=-\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，

所以 $c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})}$ 。

13．如果$F_1=4$牛顿，$F_2=6$牛顿，$\varphi=60°$（图35），求$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$的合力$\boldsymbol{R}$的模，并求合力$\boldsymbol{R}$同$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$所成的角。

解：利用上题求出的公式，

可求得

$$R=\sqrt{4^2+6^2+2\cdot4\cdot6\cdot\cos60°}$$

$$=\sqrt{16+36+24}$$

$$=8.72\text{（牛顿）}。$$

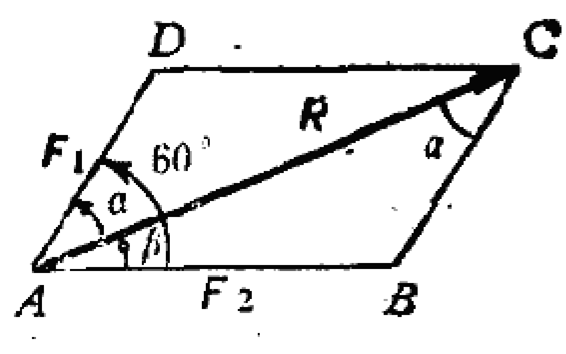


图 35

根据正弦定理有

$$\frac{F_2}{\sin\alpha}=\frac{F_1}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin(180°-\varphi)}=\frac{R}{\sin\varphi}。$$

于是

$$\sin\alpha=\frac{F_2\sin\varphi}{R}=\frac{6\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{8.72}=0.596,$$

$\therefore\quad \alpha=36°35'$；

$$\sin\beta=\frac{F_1\sin\varphi}{R}=\frac{4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{8.72}=0.397,$$

$\therefore\quad \beta=23°24'$。

检验：$\alpha+\beta=36°35'+23°24'=59°59'$。

14．如果 $F_1=8$ 牛顿，$F_2=5$ 牛顿，它们之间的夹角为 30°，求这两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力的模，及合力分别与力 F_1和 F_2组成的角。

15．已知不为零的向量$\overrightarrow{OA}$，由点O作向量：1）$3\overrightarrow{OA}$；2）$-2\overrightarrow{OA}$；3）$0.5\overrightarrow{OA}$；4）$-0.75\overrightarrow{OA}$；5）$\sqrt{2}\overrightarrow{OA}$。

解：在图36中描出向量$3\overrightarrow{OA}$和$-2\overrightarrow{OA}$，其余向量可类似作出。



图 36

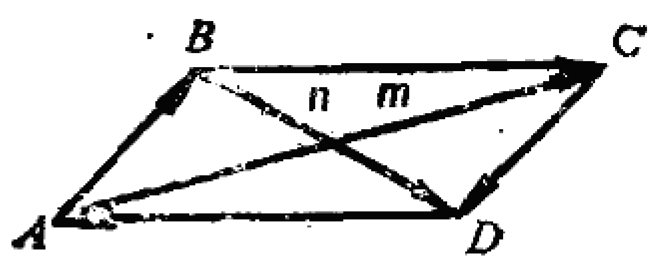


图 37

16．向量$m\boldsymbol{a}$（这里$\boldsymbol{a}\neq 0$）的长度满足下列条件：1）$|m\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|$；2）$|m\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{a}|$；3）$|m\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{a}|$。那么$m$应当是哪些数值？

17．为了得到向量$\boldsymbol{b}$并使它满足条件：1）$\boldsymbol{b}\uparrow\uparrow\boldsymbol{a}$和$|\boldsymbol{b}|=2$；2）$\boldsymbol{b}\uparrow\downarrow\boldsymbol{a}$和$|\boldsymbol{b}|=3$；3）$\boldsymbol{b}\uparrow\downarrow\boldsymbol{a}$和$|\boldsymbol{b}|=n$。那么不为

零的向量a需乘以什么样的数？

18. 在$\triangle ABC$中，中线AA_1和CC_1相交于M。如果有：1）$\overrightarrow{A_1C}=m\cdot\overrightarrow{BC}$；2）$\overrightarrow{C_1B}=m\cdot\overrightarrow{C_1A}$；3）$\overrightarrow{AM}=m\cdot\overrightarrow{MA_1}$，求因数$m$。

19. 点M为三角形ABC的边AB的中点，试用向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BC}$表示$\overrightarrow{CM}$。

20. 已知平行四边形$ABCD$的对角线所表示的向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{m}$和$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{n}$，试用$\boldsymbol{m}$和$\boldsymbol{n}$表示向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$和$\overrightarrow{DA}$（图37）。

解：根据向量的和与差的定义有

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n},\ \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{m}$$

将两个等式相加，得

$$\overrightarrow{BC}=\frac{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{2}$$

由此可求得

$$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{n}-\frac{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}=-\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}{2}=\frac{\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}}{2}$$

$$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}=-\frac{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{2}。$$

21. 证明：梯形的中位线等于两底和的一半。

22. 已知O为正六边形$ABCDEF$的中心，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，求$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$和$\overrightarrow{OF}$。

§ 3. 直角坐标系

1. 轴、向量和轴之间的角

规定了正方向和长度单位的直线叫做轴。

具有长度 $|e| = 1$，其方向与轴的方向重合的向量 e，称为这个轴的单位向量。

如果$a \neq 0$，且a是一个与向量 a 同向的单位向量，那么 $a = |a| \cdot e$。

轴l的方向与不为零的向量a的方向之间的角，称为向量a和轴l之间的夹角：$(\widehat{a, l}) = \varphi$，这里$\varphi \in [0°, 180°]$。

2. 向量在轴上的射影

以向量的起点在轴上的射影为起点，以向量的终点在轴上的射影为终点的有向线段，称为向量在轴上的射影。如果有向线段与轴同向，那么这个有向线段的长度取正号；如果有向线段与轴的方向相反，那么这个有向线段的长度应取负号（图38）。

若向量$a \neq 0$，那么它在轴l上的射影等于这个向量的长度与向量和轴之间的夹角的余弦的乘积（图39）：

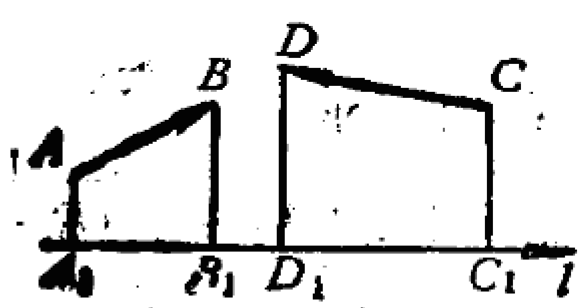


图 38

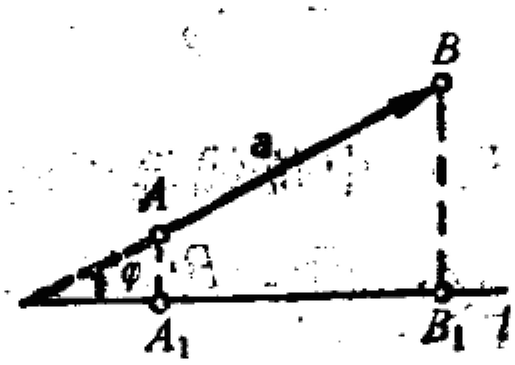


图 39

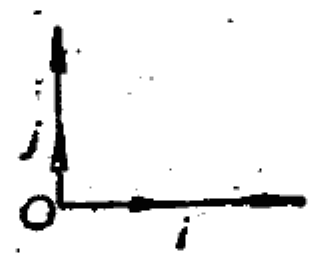


图 40

$$P_{rj_l}a = |a| \cdot \cos\varphi。 \quad (4.1)$$

射影的性质：

$$P_{rj_l}(a+b) = P_{rj_l}a + P_{rj_l}b;$$

$$P_{rj_l}(ma) = m \cdot P_{rj_l}a。$$

3. 直角坐标系

设在平面上给出一对以点O为起点的相互垂直的单位向量i和j（图40）。这样的向量对称为平面上的正交基础向量。起点O和正交基础向量（i，j）的总和称为平面直角坐标系，点O称为坐标原点，而向量i和j称为坐标向量。

4. 向量的坐标

在平面XOY内由坐标原点到任意一点M的向量称为矢量半径，并用r表示：$\overrightarrow{OM} = r$（图41）。

向量r在坐标轴上的射影，即$P_{rj_x}r = x$和$P_{rj_y}r = y$，称为向量的坐标(图41)。

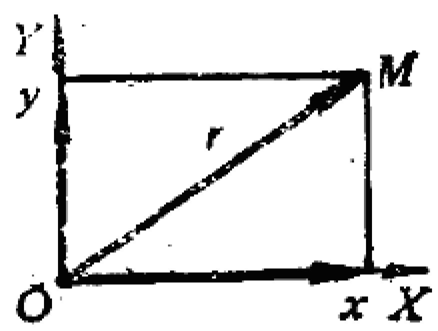


图 41

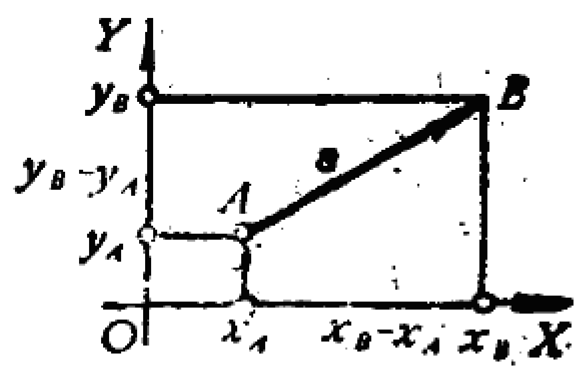


图 42

向量r的坐标可简略地写为：$r = (x, y)$。

矢量半径$r = \overrightarrow{OM}$的坐标和矢量半径r的终点M的坐标相同。

如果向量$r = \overrightarrow{AB}$的起点与坐标原点不重合，那么向量的

坐标与它的终点的坐标不同（图42）。在这种情况下，向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 在坐标轴上的射影等于 $x=x_B-x_A$ 和 $y=y_B-y_A$，即

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(x,\ y)=(x_B-x_A,\ y_B-y_A) \quad (4\cdot2)$$

5. 向量沿坐标轴的分解

向量 $\boldsymbol{a}$ 在基础向量（$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$）上的分解具有形式

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j} \quad (4.3)$$

这里 $\boldsymbol{i}$ 为 $\widehat{OX}$ 轴上的单位向量，而 $\boldsymbol{j}$ 为 OY 轴上的单位向量（图43）。x 和 y 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在基础向量（$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$）的坐标。

向量 $x\boldsymbol{i}$ 和 $y\boldsymbol{j}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿坐标轴的分向量。

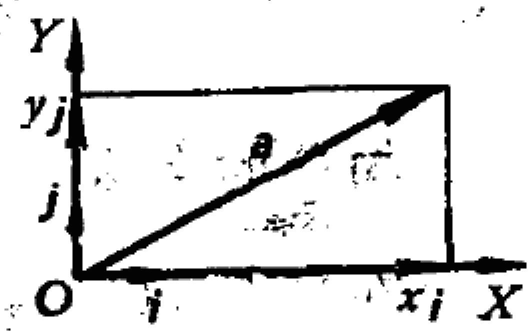


图 43

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $A(x_A,\ y_A)$，而终点为 $B(x_B,\ y_B)$，那么向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解可写成下面的形式：

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\boldsymbol{i}+(y_B-y_A)\boldsymbol{j}。 \quad (4.4)$$

6. 利用向量的坐标进行运算的法则

如果在基础向量（$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$）上给出向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则：

两个或若干个向量的和的坐标等于各向量对应的坐标的和，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2);$$

两个向量差的坐标等于这两个向量对应坐标的差，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2);$$

向量的数乘的坐标等于已知向量对应的坐标与数的乘积，即

$$m\boldsymbol{a}=(mx_1,\ my_1)。$$

7. 两个向量共线的条件

两个向量$\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$和$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$共线的条件具有形式

$$x_1=mx_2,\ y_1=my_2, \tag{4.5}$$

即如果两个向量对应的坐标成比例，那么这两个向量共线。

如果$m>0$，那么向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的方向相同；如果$m<0$，那么这两个向量的方向相反。

23. 已知$P_{rj_l}\boldsymbol{a}=-2$，$P_{rj_l}\boldsymbol{b}=1$，计算：1) $P_{rj_l}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；2) $P_{rj_l}(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$。

解：利用射影的性质，得

1) $P_{rj_l}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2P_{rj_l}\boldsymbol{a}+P_{rj_l}\boldsymbol{b}=2\cdot(-2)+1=-3$；

2) $P_{rj_l}(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=3P_{rj_l}\boldsymbol{a}-2P_{rj_l}\boldsymbol{b}=3\cdot(-2)-2\cdot 1=-8$。

24. 已知：$P_{rj_l}\boldsymbol{a}=3$，$P_{rj_l}\boldsymbol{b}=-1$。计算：1) $P_{rj_l}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；2) $P_{rj_l}(\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$。

25. 证明：$P_{rj_l}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=P_{rj_l}\boldsymbol{a}-P_{rj_l}\boldsymbol{b}$。

26. 证明：如果对于两个不平行的轴l和n有关系式$P_{rj_l}\boldsymbol{a}=0$和$P_{rj_n}\boldsymbol{a}=0$，那么$\boldsymbol{a}=0$。

27. 在怎样的情况下，向量在轴上的射影：1) 等于零；2) 绝对值等于已知向量的长？

28. 已知向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$关于直线l为对称。若这两个向量在轴n上的射影满足条件：1) 平行于直线l；2) 垂直于直线l，那么这两个向量在轴n上的射影之间应具有怎样的关系式？

29. 已知向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，当轴l在什么位置时，等式$P_{rj_l}\boldsymbol{a}=$

$P_{rj_l}b$正确？

30. 已知向量$\boldsymbol{a}$与轴l组成60°的角，$|\boldsymbol{a}| = 6$，求向量$\boldsymbol{a}$在轴l上的射影。

解：根据公式(4.1)得

$$P_{rj_l}a = 6\cdot\cos 60° = 3。$$

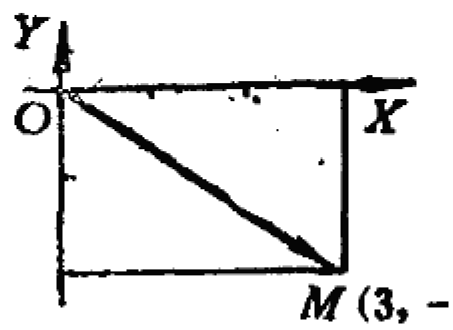


图 44

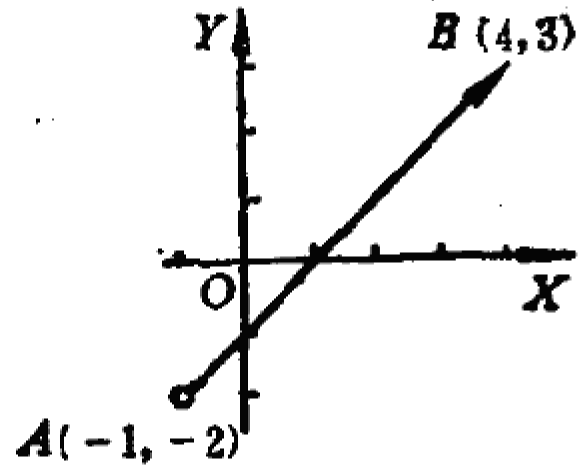


图 45

31. 已知向量$\boldsymbol{a}$与轴 l 组成的角为：1) 45°；2) 120°；3) 150°。求在这些条件下向量a在轴l上的射影。

32. 设点A和B的坐标分别为$A(-1,\ -2)$，$B(4,\ 3)$，求作：1) 向量$\boldsymbol{a}=(3,\ -2)$；2) 向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$。

解：1) 作出终点为$M(3,\ -2)$的向量半径（图44）。向量半径$\overrightarrow{OM}$为所求的向量；

2) 作出点$A(-1,\ -2)$，点$B(4,\ 3)$。以点A为向量的起点，点B为向量的终点（图45），则向量$\overrightarrow{AB}$为所求的向量。

33. 求作下列向量：1) $\boldsymbol{a}=(-2,\ 4)$；2) $\boldsymbol{b}=(3,\ 2)$；3) $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，其中$A(-1,-1)$，$B(4,\ 1)$；4) $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$，其中$C(0\ ,2)$，$D(4,0)$。

34. 已知$A(-1,\ -2)$，$B(4,\ 5)$，求向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 的坐标。

解：根据公式(4.2)得

$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(4-(-1),5-(-2))=(5,7)$。

35. 求向量的坐标：1）$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$A(-2,-2)$，$B(4,-1)$；2）$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，$B(1,-3)$，$C(4,-5)$。

36. 已知向量$\boldsymbol{a}=(-2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(5,0)$，$\boldsymbol{c}=(3,-5)$，求下列向量的坐标：1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$；3）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$；4）$2\boldsymbol{a}$；5）$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$；6）$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$。

37. 将下列向量用单位向量$\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{j}$来表示：1）$\boldsymbol{a}=(-2,4)$；2）$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$A(-2,-1)$，$B(4,-3)$。

解：1）这里$x=-2$，$y=4$。根据公式(4.3)得：

$$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}。$$

2）根据公式(4.4)可求得：

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(4-(-2))\boldsymbol{i}+(-3-(-1))\boldsymbol{j}=6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}。$$

38. 试用单位向量$\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{j}$表示下列向量：1）$\boldsymbol{a}=(-2,-4)$；2）$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$A(-1,2)$，$B(-2,-6)$。

39. 已知$A(-2,-3)$，$B(2,4)$和$C(5,1)$，试将向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{CA}$按照单位向量$\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{j}$分解。

40. 已知向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$对应的起点和终点分别为：1）$A(1,1)$，$B(7,3)$，$C(-4,-5)$，$D(5,-2)$；2）$A(-3,1)$，$B(3,3)$，$C(-2,-3)$，$D(6,1)$；3）$A(-3,-6)$，$B(-1,2)$，$C(3,-5)$，$D(5,3)$。检验向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$是否共线。如果共线，那么它们是否同向？

解：1）由公式（4.2）我们可求得向量的坐标：$\overrightarrow{AB}=(6,2)$，$\overrightarrow{CD}=(9,3)$。由关系式（4.5）我们可知这些向量的坐标成比例：$\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}=m>0$。所以，这两个向量共线并且同向。

2）类似地可以得到：$\overrightarrow{AB}=(-6,3)$，$\overrightarrow{CD}=(8,-4)$，

$\frac{-6}{8}=\frac{3}{-4}=m<0$。所以，这两个向量共线，但方向相反。

3）我们有 $\overrightarrow{AB}=(4,4)$，$\overrightarrow{CD}=(4,-1)$，由于 $\frac{4}{4}\neq\frac{-1}{4}$，那么向量的坐标不成比例。所以，这两个向量不共线。

41．已知向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$对应的起点和终点的坐标分别为：1）$A(-3,6)$，$B(1,2)$，$C(4,-6)$，$D(-2,0)$；2）$A(-3,1)$，$B(3,3)$，$C(-2,-3)$，$D(6,-1)$；3）$A(-3,-6)$，$B(-1,2)$，$C(3,-5)$，$D(5,3)$。检验向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$是否共线。如果共线，那么它们是否同向？

§4. 向量的长度、平面上两点之间的距离、向量同坐标轴所成的角

向量半径$\boldsymbol{a}=(x,y)$的长度可由下面的公式求得：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{4.6}$$

向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,\ y_B-y_A)$的长度可由下面的公式求得：

$$|\overrightarrow{AB}|=|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \tag{4.7}$$

我们也可以利用这个公式计算平面上两点之间的距离。

向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$同坐标$ox$和$oy$组成的角可由下面的公式求得：

$$\cos\alpha=\frac{x_B-x_A}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}。 \qquad (4.8)$$

42. 已知$A(1,1)$，$B(4,-3)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的长度。

解：根据公式(4.7) 可求得：

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (-3-1)^2} = 5$。

43. 已知点$A(4, 0)$,$B(7,4)$和$C(-4,6)$,求向量$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{CA}$的长度。

44. 求向量$\boldsymbol{a} = (-5, -12)$的长度。

45. 已知三角形的顶点分别为：1) $A(4,0)$，$B(7, 4)$和$C(-4,6)$；2) $A(6,7)$，$B(3,3)$和 $C(1,-5)$。试计算三角形的周长。

46. 求出与下列向量方向相同的单位向量：1) $\boldsymbol{a} = (3, 4)$；2) $\boldsymbol{b} = (-6, -8)$。

解：1) 我们求得已知向量$\boldsymbol{a}$的长度为：$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5$。那么，与向量$\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量$\boldsymbol{e}$等于 $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{5}\boldsymbol{a}$。向量$\boldsymbol{e}$的每个射影同样为向量$\boldsymbol{a}$对应的射影缩小 5 倍。所以，

$\boldsymbol{e} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} + \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$或$\boldsymbol{e} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$。

2) 类似地，我们可得$\boldsymbol{e} = (-0.6, -0.8)$。

47. 已知：1) 向量$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $A(2,-3)$, $B(1,4)$; 2) $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$，$B(-1,1)$，$C(2,5)$。试分别求出这些向量与坐标轴所组成的角的余弦。

解：1) 按照公式(4.8)，我们求得：

$$\cos\alpha = \frac{1-2}{\sqrt{(1-2)^2 + (4+3)^2}} = -0.1\sqrt{2},$$

$$\cos\beta = \frac{4+3}{\sqrt{(1-2)^2+(4+3)^2}} = 0.7\sqrt{2}。$$

2）在这种条件下，我们求得：

$\cos\alpha = 0.6$，$\cos\beta = 0.8$。

48．已知下列向量：1）$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$，$A(-2,-3)$，$B(3,9)$；2）$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$，$B(4,-1)$，$C(0,2)$。试求出这些向量与坐标轴所组成的角的余弦。

49．求出到点$A(7,-1)$，$B(-2,2)$和$C(-1,-5)$等距离的点O_1。

50．计算到点$A(10,7)$，$B(-4,-7)$和$C(12,-7)$等距离的点O_1的坐标。

51．求出过点$A(-1,9)$，$B(-8,2)$，$C(9,9)$的圆的圆心，并求出它的半径长。

52．已知由轴OX上一点M到点$N(10,5)$的距离等于13，求点M。

53．已知由轴OY上一点B到点$A(3,-1)$的距离等于5，求点B。

54．已知：1）$A(-4,0)$和$B(-3,-7)$；2）$A(-3,-1)$和$B(6,2)$。试计算在轴OY上且距A，B等远的点的坐标。

55．已知：1）$A(5,13)$和$B(-12,-4)$；2）$A(0,6)$和$B(2,-4)$。试求出在轴OX上且距A，B等远的点。

56．已知：1）$A(-8,-1)$；2）$A(4,2)$。试计算距坐标轴和点A等远的点M的坐标。

57．求出到纵坐标轴和点$A(8,6)$的距离都等于5的点M的坐标。

58．计算到横坐标轴和点$A(1,2)$的距离都等于10的点

M的坐标。

§5. 线段的定比分点

如果点C将线段AB分成的两部分具有关系式

$$AC:CB=\lambda,$$

那么点C的坐标可按下列公式求得：

$$x_c=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\quad y_c=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda} \tag{4.9}$$

如果$\lambda=1$，那么就得到求线段中点坐标的公式：

$$x_c=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_c=\frac{y_A+y_B}{2}\text{。} \tag{4.10}$$

59. 已知：1) $A(5,-4)$和$B(-1,2)$；2) $A(6,-3)$和$B(-2,-7)$。试计算线段AB的中点C的坐标。

60. 点C将线段AB分成3：5两部分（由A到B）。线段的端点坐标分别为$A(2,3)$和$B(10,11)$。求点C的坐标。

61. 以$A(3,-2)$和$B(9,6)$为端点的线段被点C分成的两部分之比为1：3（由B到A)。求点C。

62. 端点为$A(3,-2)$和$B(10,-9)$的线段被点C分成的两部分之比为2：5。求点C。

63. 以$A(-11,1)$和$B(9,11)$为端点的线段被分成2：3：5三部分（由A到B)。求各分点的坐标。

解：我们用C和D表示由A到B的分点，按照已知条件得$x_A=-11$，$x_B=9$，$y_A=1$，$y_B=1$，$AC:CD:DB=$

$2:3:5$。

点C分AB之比$\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{2}{3+5}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$。于是

$$x_c=\frac{-11+\frac{1}{4}\cdot 9}{1+\frac{1}{4}}=-7,$$

$$y_c=\frac{1+\frac{1}{4}\cdot 11}{1+\frac{1}{4}}=3。$$

∴ 点C的坐标为$C(-7,3)$。

由于点D为AB的中点，那么，

$$x_D=\frac{-11+9}{2}=-1,\quad y_D=\frac{1+11}{2}=6。$$

∴ 点D的坐标为$D(-1,6)$。

64．以$A(-5,-2)$和$B(4,2.5)$为端点的线段由A到B被分成的三部分之比为$3:4:2$。求分点的坐标。

65．已知线段的一个端点为$A(-3,-5)$，它的中点为$C(3,-2)$。求线段的另一个端B。

66．已知线段的一个端点为$B(-3,-2)$，它的中点为$C(-2,3)$。求线段的另一个端点A。

67．已知三角形的顶点为$A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$C(x_C,y_C)$。求这个三角形的中线的交点。

解：我们知道，三角形的三条中线交于一点，这点分每条中线之比为$2:1$。

我们求出BC边的中点D：

$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2},\ y_D=\frac{y_B+y_C}{2}。$$

我们来求中线的交点M。为此，我们将中线AD按$\lambda=2:1=2$之比分开（由A到D）。那么，点M的坐标为：

$$x_M=\frac{x_A+\lambda x_D}{1+\lambda}=\frac{x_A+2\cdot\frac{x_B+x_C}{2}}{1+2}$$

$$=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},$$

$$y_M=\frac{y_A+\lambda y_D}{1+\lambda}=\frac{y_A+2\cdot\frac{y_B+y_C}{2}}{1+2}$$

$$=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}。$$

由此可见，三角形的中线交点的坐标等于三个顶点的同名坐标的算术平均值。

68．如果三角形三个顶点的坐标分别为：1）$A(7,-4)$，$B(-1,8)$，$C(-12,-1)$；2）$A(-4,2)$，$B(2,6)$，$C(0,-2)$。求出这两个三角形的中线交点的坐标。

69．已知线段的端点分别为$A(-8,-5)$和$B(10,4)$。求出将这条线段分成相等的三部分的分点C和D的坐标。

70．已知线段MN的端点坐标为$M(-7,-2)$和$N(13,3)$。求出将这条线段分为五等分的分点的坐标。

71．点$C(3,5)$分线段AB之比为$AC:CB=3:4$。如果线段的终点为$B(-1,1)$，求线段的起点A的

坐标。

72．点C（－3，1.5）分线段 AB 之比为 $AC:CB=3:2$。如果线段的终点为 B（7，－3.5），求线段的起点 A。

73．点 C（－2，1）分线段 AB 之比为 $AC:CB=2:1$。如果它的起点为A（－10，5），求线段的终点B。

74．已知线段 AB 的端点坐标为 A（－9，－3）和 B（1，2）。为了使$AB:BC=5:3$，需要将线段AB延长到怎样的点C?

解：根据已知条件，我们有

$$x_A=-9,\ x_B=1,\ y_A=-3,\ y_B=2,$$
$$\lambda=AB:BC=5:3。$$

设所求的点为C（x_C，y_C）。对于将线段AC分为给定的比的点B（1，2），我们有

$$1=\frac{-9+\frac{5}{3}x_C}{1+\frac{5}{3}},\quad 2=\frac{-3+\frac{5}{3}y_C}{1+\frac{5}{3}}$$

由此得$x_C=7$，$y_C=5$，即C（7，5）。

75．已知线段的端点为A（－4，7）和B（－3，5）。试在线段AB的延长线上求一点C，使$AB:BC=1:7$。

76．已知线段的端点为 A（－5，－2）和 B（－1，0）。为了使 $AB:BC=2:5$，需要将 AB 延长到怎样的点C。

§6. 两向量的数量积

两个不为零的向量的长度与它们之间的夹角余弦的乘积

称为这两个向量的数量积。

向量a和b的数量积用$a\cdot b$表示。于是，根据定义有

$$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cdot\cos(\widehat{a,b})。\qquad(4.11)$$

两个向量的数量积等于一个向量的模乘以另一个向量在第一个向量方向上的射影：

$$a\cdot b=|a|\cdot Prj_a b=|b|\cdot Prj_b a。\qquad(4.12)$$

下面我们指出数量积的一些性质：

1°. $a\cdot b=b\cdot a$（交换律）。

2°. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$（分配律）。

3°. $m(a\cdot b)=(m\cdot a)\cdot b=a\cdot(m\cdot b)$（结合律）。

数量积$a\cdot a$称为向量a的数量平方、向量的数量平方等于它的长度的平方：

$$a\cdot a=a^2。\qquad(4.13)$$

两个不为零的向量a和b互相垂直的充分必要条件是它们的数量积等于零：

$$(a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\cdot b=0)\Longleftrightarrow a\perp b。\qquad(4.14)$$

两个不为零的向量a和b共线的充分必要条件是关系式

$$a\cdot b=\pm|a|\cdot|b|。\qquad(4.15)$$

成立（式子中取正号表明$a\uparrow\uparrow b$，取负号表明$a\uparrow\downarrow b$）。

向量$a=(x_1,y_1)$和$b(x_2,y_2)$的数量积可按照下面的公式用它们的坐标表示：

$$a\cdot b=x_1x_2+y_1y_2\qquad(4.16)$$

两个向量$a=(x_1,y_1)$和$b=(x_2,y_2)$之间的夹角可按下面的公式求得：

$$\cos(\widehat{a,b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}。\qquad(4.17)$$

从这个公式可以看出，当向量a和b互相垂直时，我们

有

$$x_1x_2+y_1y_2=0。\tag{4.18}$$

77．已知向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$组成的角为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=60°$，且$|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=3$。试计算$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$。

解：利用公式（1.11）和（1.13），得：

$$\begin{aligned}&(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\\&=4\boldsymbol{a}^2-6|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos60°+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\\&\quad\cdot\cos60°-3\boldsymbol{b}^2\\&=4\times6^2-6\times6\times3\times0.5+2\times6\times3\times0.5-3\times3^2\\&=81。\end{aligned}$$

78．已知向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$之间的夹角为120°，且$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=5$。计算$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})^2$。

79．已知向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$之间的夹角为150°，且$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$。计算$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot4\boldsymbol{a}$。

80．求向量$\boldsymbol{a}=(-3,2)$和$\boldsymbol{b}=(4,3)$的数量积。

解：根据公式（4.16）得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-3)\times4+2\times3=-6。$$

81．求下列向量的数量积：1）$\boldsymbol{a}=(2,4)$和$\boldsymbol{b}=(4,1)$；2）$\boldsymbol{c}=(\frac{1}{2},\frac{2}{5})$和$\boldsymbol{d}=(\frac{2}{3},\frac{5}{6})$。

82．已知点$A(-2,4)$，$B(4,-2)$，$C(4,-2)$，$D(1,5)$。计算数量积$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$。

83．求下列向量的数量积：1）$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$；2）$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BC}$，这里有$A(1,3)$，$B(-2,-4)$，$C(4,-3)$。

84．计算向量$\boldsymbol{a}=(-4,3)$和$\boldsymbol{b}=(3,-4)$之间

的夹角。

解：根据公式（4.17）得

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{-4\times3+3\times(-4)}{\sqrt{(-4)^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$=-0.96;$$

$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=163°44'$。

85. 已知A（3，1），B（7，4），C（3，2），D（6，6）。计算向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$之间的夹角。

86. 已知$\boldsymbol{a}=$（2，3）和$\boldsymbol{b}=$（1，1）。求向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$之间的夹角的余弦。

87. 检验下列各组向量是否互相垂直：1）$\boldsymbol{a}=$（-3，2）和$\boldsymbol{b}=$（4，6）；2）$\boldsymbol{c}=$（$\frac{3}{4}$，$-\frac{1}{5}$）和$\boldsymbol{d}=(\frac{4}{3},5)$；3）$\boldsymbol{p}=$（-2，5）和$\boldsymbol{q}=$（3，1）

解：根据公式（4.18）求得

1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(-3)\times4+2\times6=0$，即$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

2）$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}+(-\frac{1}{5})\times5=0$，即$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$；

3）$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=(-2)\times3+5\times1=-1\neq0$，即$\boldsymbol{p}$不垂直于$q$。

88. 验证下列各组向量是否互相垂直：1）$\boldsymbol{a}=$（-3，5）和$\boldsymbol{b}=$（5，3）；2）$\boldsymbol{c}=$（2，-4）和$\boldsymbol{d}=$（-4，-2）；3）$\boldsymbol{p}=$（-3，-4）和$\boldsymbol{q}=$（5，1）。

89. 为了使向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$垂直于向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，那么向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$应满足怎样的条件？

90. 如果$|\boldsymbol{F}|=3$，$|\boldsymbol{S}|=8$，$(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{S}})=60°$，求力$\boldsymbol{F}$在

位移S上所做的功。

解：功A可按公式$A=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{S}})$来计算，这里$\boldsymbol{F}$为作用力，$\boldsymbol{S}$为位移向量，于是我们有

$$A=3\times8\times\cos60^\circ=12\text{（功的单位）。}$$

91. 一个质点在力$\boldsymbol{F}=(2,-1)$的作用下做直线运动，求算这个质由位置$M(1,-2)$移动到$N(5,-5)$所做的功。

§7. 直角坐标变换

1. 坐标轴的平移

若两个直角坐标系有不同的原点，但它们的坐标轴互相平行且方向相同，那么同一个点在这两个坐标系中的坐标之间有下列关系：

$$x=x_1+x_0,\quad y=y_1+y_0。\qquad(4.19)$$

这里x和y为某点在原坐标系中的坐标，x_1和y_1为这点在新坐标系中的坐标，x_0和y_0为新坐标系的原点O_1在原坐标系中的坐标（图46）。

2. 坐标轴的旋转（不改变坐标原点）

若x和y是某点原来的坐标，α为旋转角，x_1和y_1为这点在经过坐标旋转而得到的新坐标系中的坐标（图47），

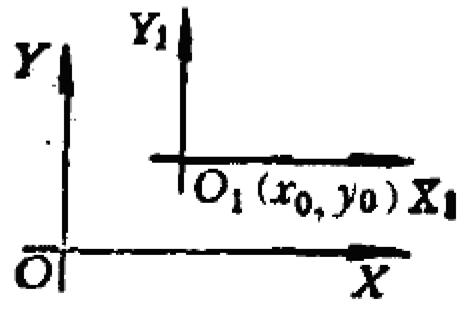


图 46

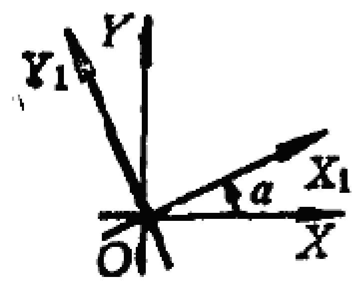


图 47

那么

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha, \tag{4.20}$$

$$x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha。 \tag{4.21}$$

92. 将坐标原点平移到坐标为$x_0 = 2$和$y_0 = -3$处，某点在新坐标系中的坐标为$x_1 = 3$，$y_1 = -1$。求这点在原坐标系中的坐标。

解： 根据公式（4.19）得：

$$x = x_1 + x_0 = 3 + 2 = 5,$$

$$y = y_1 + y_0 = -1 + (-3) = -4。$$

93. 在坐标轴的方向不变的情况下，将坐标轴原点移动到下列各点：1）（-3，5）；2）（4，-2）；3）（-1，-3）；4）（2，1）。已知某点在新坐标系中的坐标为$x_1 = -2$和$y_1 = 4$，求这点在原坐标系中的坐标。

94. 已知某点在原坐标系中的坐标为$x = -4$和$y = 2$。而经过平移坐标轴后，新坐标系原点的坐标为$x_0 = 3$和$y_0 = -1$。求这点在新坐标系中的坐标。

解： 根据公式（4.19），我们求得：

$$x_1 = x - x_0 = -4 - 3 = -7,$$

$$y_1 = y - y_0 = 2 - (-1) = 3。$$

95. 将坐标原点分别移动到下列各点：1）（3，2）；2）（-3，2）；3）（3，-2）；4）（-3，-2）。已知某点在原坐标系中的坐标为$x = -2$和$y = -3$，求这点在新坐标系中的坐标。

96. 在坐标轴的方向相同的两个坐标系XOY和$X_1O_1Y_1$

中，某个点的坐标相应为（－2，3）和（－7，6）。求每一个坐标系的原点在另一个坐标系中的坐标。

解：设 $x=-2$，$y=3$ 和 $x_1=-7$，$y_1=6$。根据公式（4.19）得：

$-2=-7+x_0$，$3=6+y_0$，即

$x_0=5$，$y_0=-3$。

∴ 在坐标系 XOY 中，新原点的坐标为：$O(5, -3)$。

在公式（4.19）中，交换 x 和 x_1，y 和 y_1，于是得：

$-7=-2+x_{01}$，$6=3+y_{01}$，即

$x_{01}=-5$，$y_{01}=3$。

∴ 坐标系 $X_1O_1Y_1$ 的新原点的坐标为：$O_1(-5, 3)$。

97. 在坐标轴方向相同的两个坐标系 XOY 和 $X_1O_1Y_1$ 中，某点的坐标相应为（－4，7）和（－8，3）。求每个坐标系的原点在另一个坐标系中的坐标。

98. 两个坐标系的坐标轴方向相同。第一个坐标系中的原点在第二个坐标系中的坐标为（－3，5）。求第二个坐标系的原点在第一个坐标系中的坐标。

99. 已知点 $M(x, y)$。如果把纵轴当作横轴，把横轴当作纵轴，那么这个点的坐标应怎样改变？

100. 在不改变坐标原点的条件下将坐标轴旋转60°。已知点 M 在原坐标系中的坐标为（$-2\sqrt{3}$，4），求这点在新坐标系中的坐标。

解：根据公式（4.21）得：

$x_1=-2\sqrt{3}\cos 60°+4\sin 60°$，

$y_1=2\sqrt{3}\sin 60°+4\cos 60°$，

即 $x_1=\sqrt{3}$，$y_1=5$。

101. 将坐标轴旋转下列角度：1）45°；2）30°。已

知点A在原坐标系中的坐标为（4，－2），求这点在新坐标系中的坐标。

102. 在将原坐标系的坐标轴旋转45°后得到的新坐标系中，给出一点（－2，4）。求这点在原坐标系中的坐标。

解：根据公式（4.20）得：

$$x = -2\cos 45° - 4\sin 45°,$$

$$y = -2\sin 45° + 4\cos 45°,$$

即 $x = -3\sqrt{2}$，$y = \sqrt{2}$。

103. 将原坐标系的坐标轴旋转下列角度：1）30°；2）60°。如果某点在新坐标系中的坐标为（$2\sqrt{3}$，2），求这点在原坐标系中的坐标。

§8. 极 坐 标

极坐标系包含下列元素：1）点O——极点；2）由点O引出的射线——极轴OP；3）单位长度l。

在平面内任取一点M（图48）。由这点到极点的距离——用给定的长度单位表示的向量半径的长度，和向量半径与极轴的夹角，这样两个条件给定了点M的位置。φ和r称为点M的极坐标，r叫做极半径，φ叫做极角。点M的极坐标可记作：$M(r, \varphi)$。

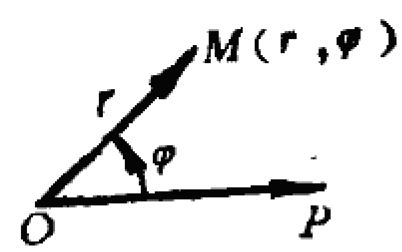


图 48

当点M与极点重合时，那么$r = 0$，而φ不定，对平面上其它的点$r > 0$，φ值可由精确到2π的整数倍所确定。

如果极坐标的极点位于直角坐标系的原点，而极轴与正半轴ox重合，那么，角的直角坐标可由下列极坐标表示：

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi。\qquad (4.22)$$

平面上任意一点的极坐标可用直角坐标表示：

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (4.23)$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}。\qquad (4.24)$$

104. 在极坐标系中作出点$M(2, \frac{\pi}{4})$。

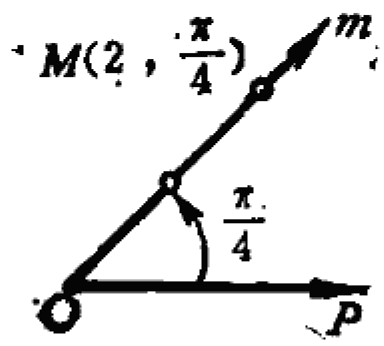


图 49

解：过极点O引一条与极轴Op组成$\frac{\pi}{4}$角的射线Om。在Om上截取线段OM，使它的长度等于2个单位。那么，点M就是求作的点（图49）。

105. 在极坐标系中作出下列各点：1）$A(3, \frac{\pi}{3})$；2）$B(4, \frac{3\pi}{4})$；3）$C(2, -\frac{\pi}{6})$；4）$D(5, -\frac{3\pi}{4})$。

106. 求出点$(2, \frac{\pi}{4})$，$(4, \frac{2\pi}{3})$和$(1, -\frac{\pi}{6})$的对称点的极坐标：1）关于极点对称；2）关于极轴对称。

107. 求点$A(4, \frac{\pi}{3})$的直角坐标。

解：根据公式（4.22）可求得

$$x = 4\cos\frac{\pi}{3} = 2, \quad y = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}。$$

108. 求下列各点的直角坐标：1）$A\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$；2）$B\left(2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$；3）$C\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$；4）$D\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$。

109. 求直角坐标为（-3，$3\sqrt{3}$）的点的极坐标。

解：根据公式（4.23）得

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6,$$

$$\sin\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\varphi = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}。$$

由正弦和余弦的符号可知极角 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$。

110. 求下列各点的极坐标：1）$A(0, 5)$；2）$B(0, -\sqrt{3})$；3）$C(-\sqrt{3}, -1)$；4）$D(1, -1)$。

111. 一个点的直角坐标和极坐标可以是同一对数吗？

112. 已知两点的极坐标为 $A(r_1, \varphi_1)$ 和 $B(r_2, \varphi_2)$，计算这两点之间的距离。

解：根据余弦定理有

$$|AB| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}。$$

113. 计算两点 $A\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ 和 $B\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$之间的距离。

§9. 综 合 题

（114题——123题，要求用向量证明。）

114．求证：任意三角形的三条中线可以作为三角形的边。

115．求证：连结三角形两边中点的线段等于第三边的一半。

116．已知平行四边形$ABCD$和平面上任意一点O，求证：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$。

117．求证：任意四边形各边的中点是平行四边形的顶点。

118．证明：三角形的三条高相交于一点。

119．求证：平行四边形对角线的平方和等于它的各边的平方和。

120．求证：菱形的对角线互相垂直。

121．求证：等腰梯形的两条对角线相等。

122．求证：直角梯形的两条对角线的平方差等于两底的平方差。

123．求证：直径上的圆周角是直角。

124．求点A（－2，－3）在下列条件的对称点：1）关于坐标原点对称；2）关于OX轴对称；3）关于OY轴对称；4）关于Ⅰ和Ⅲ象限坐标角的平分线对称。

125．已知以A（－3，1）和B（－1，7）为端点的线段。求在下列条件的线段AB的端点的对称点的坐标：1）关于坐标原点对称；2）关于OX轴对称；3）关于OY轴对称；4）关于Ⅱ和Ⅳ象限坐标角的平分线对称。

126. 已知以$A(3, 2)$，$B(7, 4)$和$C(1, 6)$为顶点的三角形，求在给定的条件下三角形顶点对称点的坐标：1）关于坐标原点对称；2）关于OX轴对称；3）关于OY轴对称；4）关于Ⅰ和Ⅲ象限坐标角的平分线对称。

127. 以$A(-2, 4)$和$B(6, 12)$为端点的线段被点C所平分，已知点D的坐标为$D(7, -4)$，求线段CD的长度。

128. 已知三角形各边中点的坐标分别为$(2, 1)$，$(0, -4)$和$(-4, -1)$。求三角形三个顶点的坐标。

129. 已知以点$A(4, 6)$和$B(1, 3)$为端点的线段，将这条线段沿由A到B的方向延长到怎样的点C，才能使线段AC为线段AB的3倍？

130. 将线段AB分成5等分，线段的一个端点的坐标为$A(8, 6)$，第二个分点为$D(2, 4)$（由A到B）。求点B的坐标。

131. 某些点将夹在$A(-6, 8)$和$B(9, 12)$之间的线段沿由A到B的方向分成同一比值，求这些点的向量半径的长。

132. 在向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$和$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$上作三角形$ABC$，并引三角形的中线$AM_1$，$BM^2$和$CM_3$。如果三角形的顶点坐标为$A(2, 5)$，$B(4, -4)$和$C(12, -2)$，求$|AM_1|$。

133. 已知线段AB的端点坐标为$A(-7, -1)$和$B(9, 7)$，点C将线段分成两部分的比为$5:3$（由A到B）。求点C与它关于坐标原点的对称点的连结线之长。

134. 线段AB被分成七等分，已知第4个分点的坐标为$F(4, 1)$（由A到B），如果点B的坐标为$B(13, 4)$，求点A的坐标。

135．在第Ⅰ和第Ⅲ象限的坐标角的平分线求出一点，使它到点A（7，2）和B（2，－13）的距离相等。

136．已知A（3，2），B（－2，1）和C（1，－4）为平行四边形的顶点，而且A和C是相对的顶点，求第四个顶点D。

137．已知平行四边形的相对顶点为A（－4，2）和C（2，－3）及B（0，1）和D。求点D的坐标。

138．已知平行四边形的相邻顶点A（－3，1）和B（1，3），两条对角线相交于点M（1，－2）。求另两个顶点。

小　测　验

第一组

1）　若A（－2，－3），B（1，4），求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标。

2）　已知点C将线段AB分成的两部分之比为1∶4（由A到B），B的坐标为（－6，－1），求点A。

3）　求距坐标轴和点A（4，－2）等远的点M。

4）　计算向量$a=(-3,4)$和$b=(4,3)$之间的夹角。

5）　求证：如果点O为三角形三条中线的交点，那么$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$。

第二组

1）　已知点A（－3，－4）和B（2，5）。试将向量$\overrightarrow{AB}$按坐标轴上的单位向量i和j分解。

2）　已知端点为A（7，－4）和B（－8，1）的线段AB；点C将线段分成的两部分之比为1∶4（由A到B），求点C。

3）　已知线段的端点为A（－10，4）和B（5，－1）。要使$AB:BC=5:1$，需将线段延长到怎样的点C？

4）　计算向量$a=(3,4)$和$b=(5,12)$的夹角的余弦。

5）　在△ABC中，引中线AM，求证$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$。

第五章　平面上的直线和它的方程

§1. 直线的一般方程、直线的向量方程和典型方程

1. 直线的一般方程

关于变量x和y的一次方程一般形式为

$$Ax+By+C=0。\tag{5.1}$$

当系数A和B不同时为零时，这样的方程称为直线的一般方程。

下面我们列出直线一般方程的特殊情况：

系　数　值	方　程　形　式	直　线　的　位　置
$C=0$	$Ax+By=0$ $(y=kx)$	直线过坐标原点
$A=0$	$By+C=0$ $(y=b)$	平行于 OX 轴
$B=0$	$Ax+C=0$ $(x=a)$	平行于 OY 轴
$A=C=0$	$y=0$	直线与 OX 轴重合
$B=C=0$	$x=0$	直线与 OY 轴重合

2. 直线的向量方程

设l为平面 xoy 上的直线（图50），M_0（x_0，y_0）为这

条直线上的一点，$\boldsymbol{n}=(A, B)$为垂直于直线l的非零的向量（直线的法向量）。如果$M(x, y)$是直线l上不同于M_0的任意一点，那么向量$\overrightarrow{MM_0}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=(x-x_0, y-y_0)$垂直于向量$\boldsymbol{n}=(A, B)$，即这两个向量的数量积等于零：

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0。\qquad (5.2)$$

方程（5.2）称为直线的向量方程，如果将它写成坐标形式，则得方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0。\qquad (5.3)$$

3. 直线的典型方程

设$M_0(x_0, y_0)$为直线上给定的一点，而$\boldsymbol{q}=(m, n)$为与直线共线的向量（这称为直线的方向向量）。如果$M(x, y)$为直线上任意一点，那么向量$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0)$和向量$\boldsymbol{q}=(m, n)$共线，即这两个向量成比例：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}。\qquad (5.4)$$

方程（5.4）称为直线的典型方程。

1. 检验点$A(3, 14)$，$B(4, 13)$，$C(-3, 0)$，$D(0, 7)$是否属于直线$7x-3y+21=0$。

解：如果某点的坐标满足方程，即可使方程转为恒等式，那么这个点属于已知直线；如果这点的坐标不满足方程，那么这点就不属于已知直线。

用点A的坐标代换方程$7x-3y+21=0$中的变量x和y，得恒等式$7\times3-3\times14+21=0$。所以点$A(3, 14)$属于已知直线。

类似地可以确定，点C和D属于已知直线，而点B不属于这条直线。

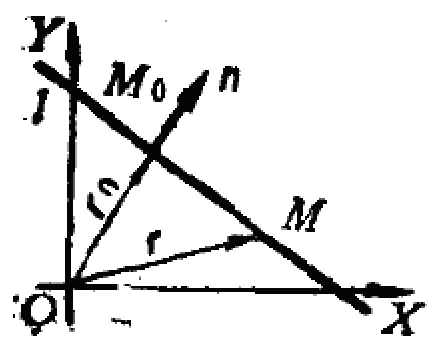


图 50

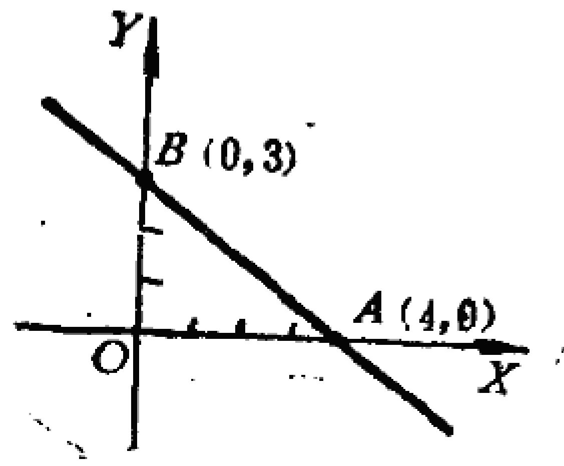


图 51

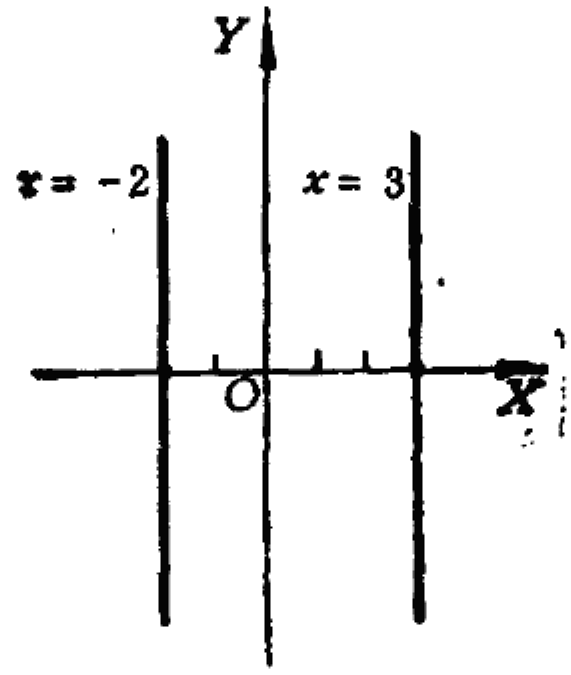


图 52

2. 求直线$4x-3y-12=0$与坐标轴的交点。

解：设A为直线与OX轴的交点。在已知方程中，如果$y=0$，则有$4x-12=0$。由此得$x=3$，即$A(3, 0)$。

设B为直线与OY轴的交点，当$x=0$时，则有$-3y-12=0$。由此得$y=-4$，即$B(0, -4)$。

3. 求下列直线与坐标轴的交点：1）$5x+4y+20=0$；2）$7x-2y+14=0$。

4. 作直线$3x+4y-12=0$。

解：为了作出直线，我们需求出直线与OX轴和OY轴的交点的坐标。设$y=0$，则有$3x-12=0$，$x=4$，$A(4, 0)$。当$x=0$时，则有$4y-12=0$，$y=3$，$B(0, 3)$。过A和B作直线，即为求作的直线（图51）。

5. 求作直线：1）$2x-5y+10=0$；2）$4x+6y-3=0$。

6. 求作直线：$x=3$；$x=-2$；$x=0$。

解：在OX轴上取点$x=3$，$x=-2$。过这两点作平行于OY轴的直线（图52）。直线$y=0$就是OX轴。

7. 求作直线：1）$x=4$；2）$x=-3$。

8. 求作直线；$y=4$；$y=-1$；$y=0$。

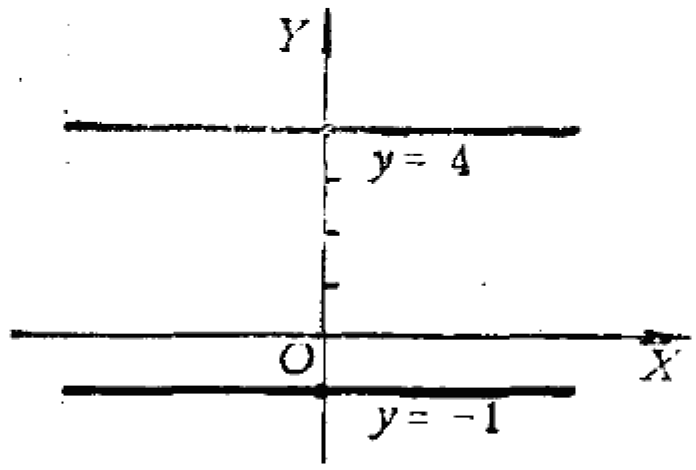


图 53

解：在OY轴上取点$y=4$，$y=-1$。过这两点作平行于OX轴的直线（图53）。直线$y=0$就是OX轴。

9. 求作直线：1）$y=2$；2）$y=-4$。

10. 1）作出由直线$x=-2$，$x=0$，$y=-3$和$y=0$围成的图形。计算这个图形的面积；

2）作出由直线$x=-3$，$x=2$，$y=-1$和$y=-5$围成的图形。计算这个图形的面积。

11. 过点（-2，3）作平行于OX轴的直线，试建立这条直线的方程。

解：平行于OX轴的直线的方程其形式为$y=b$，所求直线上的点的纵坐标等于3。因此，直线的方程为$y=3$或$y-3=0$。

12. 1）求过点（3，-4）且平行于OX轴的直线的方程；

2）求过点（-6，0）且平行于OY轴的直线的方程。

13. 矩形的边长分别为3和5。如果这个矩形在第Ⅰ象限内，它的两条边在坐标轴上，已知矩形的长边在OX轴上，试建立这个矩形各边的方程。

14. 1）矩形的边长分别为3和4。如果这个矩形在第

Ⅲ象限内，它有两条边在坐标轴上。已知矩形的宽在OY轴上，试建立这个矩形各边的方程；

2）一个正方形在第Ⅰ象限内，且有两个顶点的坐标为$A(2,0)$和$B(5,0)$。试建立这个正方形各边的方程。

15. 求过点$M_0(3,-5)$且垂直于向量$\boldsymbol{n}=(4,2)$的直线的方程。

解：设$M(x,y)$为所求的直线上的任意一点，向量$\overrightarrow{M_0M}=(x-3,y+5)$垂直于向量$\boldsymbol{n}=(4,2)$。由于这两个向量互相垂直，那么它们的数量积等于零：$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$。将这两个向量的乘积用坐标形式表示，得

$$(4,2)(x-3,y+5)=0$$

$$\Longleftrightarrow 4(x-3)+2(y+5)=0$$

$$\Longleftrightarrow 4x+2y-2=0\Longleftrightarrow 2x+y-1=0。$$

所求直线的方程为$2x+y-1=0$。

16. 已知点M_0和向$\boldsymbol{n}$量分别为：1）$M_0(-2,-3)$，$\boldsymbol{n}=(4,-5)$；2）$M_0(1,-1)$，$\boldsymbol{n}=(-3,4)$。求过已知点M_0且垂直于向量$\boldsymbol{n}$的直线的方程。

17. 已知M_0，A，B的坐标分别为：1）$M_0(-2,-3)$，$A(-5,2)$，$B(-1,4)$；2）$M_0(2,2)$，$A(1,-3)$ $B(6,-5)$；3）$M_0(-2,-3)$，$A(2,1)$，$B(1,5)$。求过点M_0且垂直于向量$\overrightarrow{AB}$的直线的方程。

18. 求过坐标原点和点$M(2,3)$的直线的方程。

解：向量$\overrightarrow{OM}$与所求的直线重合。可利用直线的典型方程（5.4）来求这条直线的方程。在方程（5.4）中，代入$m=2$，$n=3$，$x_0=0$，$y_0=0$，得：

$(\frac{x}{2}=\frac{y}{3}) \Longleftrightarrow (3x-2y=0)$。

19．已知点：1）$(-4,-1)$；2）$(5,-4)$。求过坐标原点和已知点的直线的方程。

20．计算直线$3x+4y-24=0$在坐标轴之间的长度。

解：我们先求直线与坐标轴的交点的坐标：$y=0$，$x=8$，则$A(8,0)$；$x=0$，$y=6$，则$B(0,6)$。所以线段AB的长度等于

$$|AB|=\sqrt{64+36}=10。$$

21．计算直线$4x+3-36y=0$在坐标轴之间的线段的长度。

22．在直线$2x+y-6=0$上求一点M，使它到$A(3,5)$和$B(2,6)$两点间的距离相等。

解：设点M的坐标为(x_M, y_M)，我们可得：

$$|MA|=\sqrt{(x_M-3)^2+(y_M-5)^2},$$

$$|MB|=\sqrt{(x_M-2)^2+(y_M-6)^2}。$$

由于$|MA|=|MB|$，那么

$$\sqrt{(x_M-3)^2+(y_M-5)^2}=\sqrt{(x_M-2)^2+(y_M-6)^2}。$$

将方程两边平方并化简，得：

$$x_M-y_M+3=0。$$

由于点$M(x_M, y_M)$属于直线$2x+y-6=0$，那么它的坐标满足这个方程。

解方程组

$$\begin{cases} x_M-y_M+3=0, \\ 2x_M+y_M-6=0。\end{cases}$$

我们求得$x_M=1$，$y_M=4$；$M(1,4)$。

23．1）在直线$x-2y-4=0$上求一点，使它到点

A（5，－1）和B（2，－4）距离相等；

2）在直线 $3x+4y+20=0$ 上求一点，使它到点A（－8，－3）和B（－5，－6）距离相等。

§2. 直线的截距式方程

形式为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{5.5}$$

的方程，叫做直线的截距式方程。其中a和b为直线与 OX 轴和 OY 轴的交点的横坐标和纵坐标。

24．求作直线$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$。

解：我们将已知方程改写为：

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1.$$

于是，我们有$a=2$，$b=-3$，因而可得点A（2，0）和B(0，－3)。那么，通过点A和B的直线就是所求的直线（图54）。

25．求作下列直线：

1）$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$；

2）$\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$；

3）$-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$；

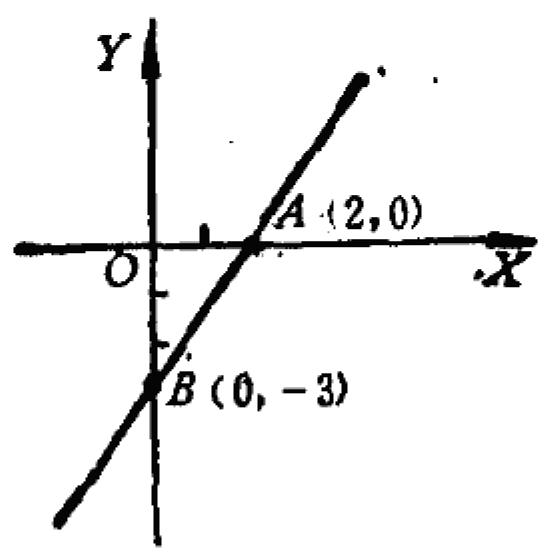


图 54

4） $-\frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1$。

26．将直线的一般方程 $3x-4y+2=0$ 化为截距式方程。

解：我们可进行下列变换：

$$3x-4y=-2；\quad \frac{3x}{-2}-\frac{4y}{-2}=1；$$

$$\frac{x}{-\frac{2}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1。$$

27．将下列方程化为截距式方程：

1） $x+y-3=0$；　　2） $2x+3y+1=0$；

3） $2x+3y-6=0$；4） $3x-4y+12=0$。

28．试建立与 OX 轴交于点（3，0），而与纵轴交于点（0，5）的直线的方程。

解：根据条件，有 $a=3$，$b=5$。因此，所求的方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1。$$

29．已知直线与坐标轴交于下列各点：1） A（-2，0）和 B（0，3）；2） A（3，0）和 B（0，-4）。试建立直线的截距式方程。

30．已知直线：1） $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$；2） $\frac{x}{12}-\frac{y}{16}=1$；3） $\frac{x}{9}-\frac{y}{12}=1$。求这些直线分别与坐标轴相交的两交点间的线段长。

§3. 直线的斜截式方程

形式为

$$y=kx+b \tag{5.6}$$

的方程，称为直线的斜截式方程。其中$k=\mathrm{tg}\alpha$，称为直线的斜率，它等于直线与OX轴夹角的正切，而b为直线与OY轴交点的纵坐标。

如果$\alpha=0$，那么$k=0$，即直线平行于OX轴。

如果$\alpha=90°$，那么k不存在，即垂直于OX轴的直线没有斜率。

如果直线通过坐标原点，那么在直线上取一点A（x_A，y_A），则有

$$k=\mathrm{tg}\alpha=\frac{y_A}{x_A}。 \tag{5.7}$$

31．求下列直线与坐标轴的交点：

1）$y=3x-6$；

2）$y=-2x+4$；

3）$y=-x-5$。

32．求作直线：$y=3x$；$y=x$；$y=\frac{1}{2}x$；$y=-3x$。

解：平面上的直线可由两个点确定。但对于通过坐标原点的直线，一个点（坐标原点）已经知道。所以，只要由直线方程再求出一个点，那么连结这个点与坐标原点的直线就是所求的直线。

我们要作$y=3x$，可假设$x=1$，求得$y=3\times1=3$。

那么连结点A（1，3）与坐标原点，就得所求的直线。

类似地，我们作出其它直线：

$y=x$，为连结点B（1，1）和坐标原点的直线；

$y=\frac{1}{2}x$，为连结点C（1，$\frac{1}{2}$）和坐标原点的直线；

$y=-3x$，为连结点D（1，-3）和坐标原点的直线（图55）。

33．求作直线：1）$y=2x$；2）$y=-x$；3）$y=-\frac{1}{3}x$；4）$y=-4x$。

34．求作直线$y=2x+8$。

解法Ⅰ：我们先作直线$y=2x$。再作直线$y=2x+8$，使它平行于直线$y=2x$且高出坐标原点8个单位(图56)。

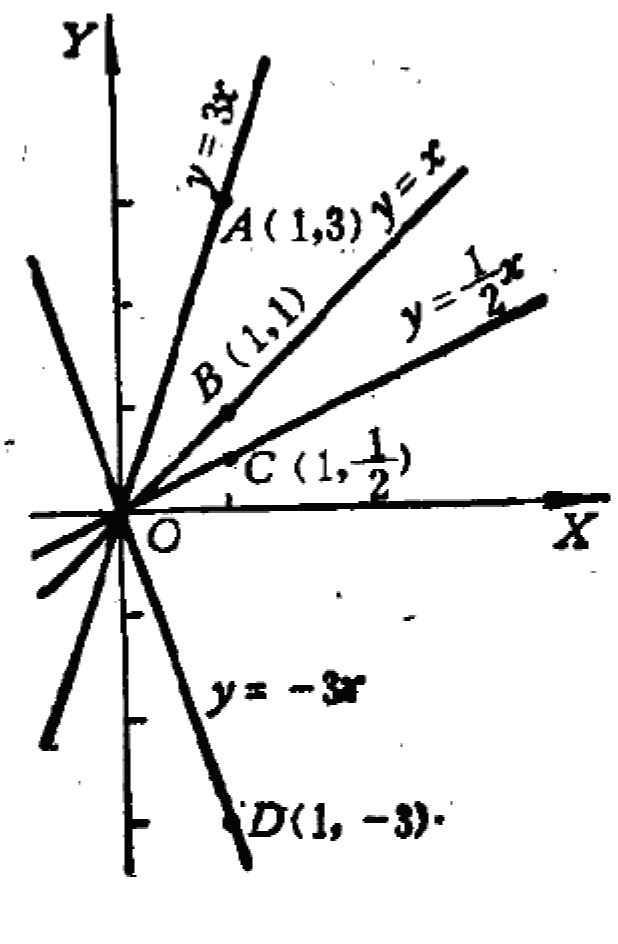


图 55

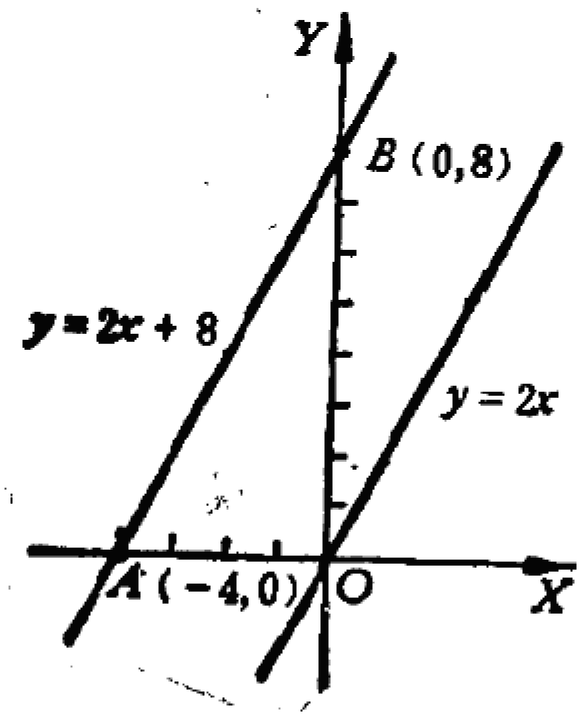


图 56

解法Ⅱ：我们先求直线与坐标轴的交点。设$y=0$，得$x=-4$，即得A（-4，0）。再设$x=0$，得$y=8$，即得B(0，8)。通过点A和点B，作出所求的直线（图56）。

35．求作直线：1）$y=2x+1$；2）$y=3x-4$；3）$y=-x+2$；4）$y=-5x-10$。

36．计算下列直线对于 OX 轴的倾斜角：1）$y=x$；2）$y=-x$；3）$y=3x$；4）$y=-2x$；5）$y=mx$。

解：1）$y=x$，$k=\mathrm{tg}\alpha=1$；$\alpha=45°$；

2）$y=-x$，$k=\mathrm{tg}\alpha=-1$；$\alpha=135°$；

3）$y=3x$，$k=\mathrm{tg}\alpha=3$；$\alpha=71°34'$；

4）$y=-2x$，$k=\mathrm{tg}\alpha=-2$；$\alpha=180°-63°26'$

$=116°34'$；

5）$y=mx$，$k=\mathrm{tg}\alpha=m$，若 $m\geqslant 0$，$\alpha=\mathrm{arctg}\,m$；若 $m<0$，$\alpha=\pi-\mathrm{arctg}m$。

37．计算下列直线对于OX轴的倾斜角：1）$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$；2）$y=-\sqrt{3}x$；3）$y=5x$；4）$y=-3x$。

38．计算下列直线对于OX轴的倾斜角：1）$y=7x-8$；2）$y=-x+1$；3）$y=0.41x-2$；4）$y=-2.9x+3$。

39．计算直线 $3x+2y+6=0$ 对于OX轴的倾斜角。

解：我们解关于 y 的方程 $3x+2y+6=0$，得 $y=-\frac{3}{2}x-3$。由此，$k=\mathrm{tg}\alpha=-1.5$。查三角函数表求得：

$\alpha=180°-56°19'=123°41'$。

40．计算下列直线对于 OX 轴的倾斜角：

1）$3x+5y+20=0$；2）$29x-10y+10=0$。

41．如果直线的斜率分别为：1）$k=5$；2）$k=-3$。试建立通过坐标原点的直线方程。

解：为了建立所求的直线方程，我们将 k 的数值代入方程$y=kx$中。于是得：1）$y=5x$或$5x-y=0$；2）$y=$

$-3x$或$3x+y=0$。

42．如果直线的斜率分别为：1）$k=-1$；2）$k=4$。试建立通过坐标原点的直线的方程。

43．如果直线的斜率$k=-3$，而$b=2$。试建立这条直线的方程。

解：将k和b的值代入方程(5.6)中，得$y=-3x+2$。

44．如果直线的斜率$k=\frac{2}{3}$，而$b=-\frac{1}{2}$。试建立这条直线的方程。

45．试建立通过坐标原点且与OX轴组成下列角的直线的方程：1）0；2）30°；3）$\frac{\pi}{4}$；4）120°；5）arctg（−3）。

解：1）$k=\text{tg}\,0=0$，$y=0$，即OX轴的方程；

2）$k=\text{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$；$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 或$\sqrt{3}x-3y=0$；

3）$k=\text{tg}\frac{\pi}{4}=1$；$y=x$或$x-y=0$；

4）$k=\text{tg}120°=\text{tg}(180°-60°)=-\text{tg}60°=-\sqrt{3}$；

$y=-\sqrt{3}x$ 或$\sqrt{3}x+y=0$；

5）$k=\text{tg}(\text{arctg}(-3))=-3$；$y=-3x$或$3x+y=0$。

46．试建立通过坐标原点且与OX轴组成下列角的直线的方程：1）60°；2）$\frac{\pi}{6}$；3）135°；4）arctg 3；5）arctg（−5）。

47．已知$b=3$，直线与OX轴的夹角为：1）$\alpha=45°$；

2）$\alpha=120°$；3）$\alpha=\operatorname{arctg}3$。求这些直线的方程。

48. 已知$b=-2$，直线与OX轴的夹角为：1）$\alpha=30°$；2）$\alpha=135°$；3）$\alpha=\operatorname{arctg}2$。求这些直线的方程。

49. 求通过坐标原点和点$A(-2,\ 3)$的直线的方程。

解：为了求通过坐标原点的直线的方程，需要知道k。k值可由关系式（5.7）求得：$k=\frac{y_A}{x_A}=-\frac{3}{2}$。将$k$值代入方程$y=kx$，得$y=-\frac{3}{2}x$或$3x+2y=0$。

也可以这样来计算k：用点$A(-2,\ 3)$的坐标来代换方程$y=kx$中的变量x和y，则有$3=k(-2)$。由此得$k=-\frac{3}{2}$。

50. 求通过坐标原点且分别通过：1）$A(3,\ 6)$；2）$A(-1,\ -5)$的直线的方程。

51. 已知通过坐标原点和点A的直线的斜率等于$\frac{3}{4}$，点A到坐标原点的距离等于10个单位长，计算点A的坐标。

解：由关系式（5.7）得$\frac{y_A}{x_A}=\frac{3}{4}$。另外，线段$OA$的长等于$\sqrt{x_A^2+y_A^2}=10$。解方程组

$$\begin{cases}\frac{y_A}{x_A}=\frac{3}{4},\\ \sqrt{x_A^2+y_A^2}=0。\end{cases}$$

我们求得（$x_A=8$，$y_A=6$）或（$x_A=-8$，$y_A=-6$），即满足已知条件的点A的坐标为$(8,\ 6)$或$(-8,\ -6)$。

52. 1）已知点P到坐标原点的距离等于5个单位长。过坐标原点和点P的直线的斜率等于$\frac{3}{4}$，求点P的坐标。

2）已知矩形的两条边分别在坐标轴的正方向上，矩形的对角线长为20个单位长度，对角线的斜率等于$\frac{4}{3}$，求矩形的顶点的坐标。

53. 已知一条直线过点（3，4），它在OY轴上的截距$b=2$，求这条直线的方程。

解：为了求这条直线的方程，需要知道k。用已知点的坐标代换方程（5.6）中的变量x和y，并代入b的值，我们得到$4=k\cdot 3+2$。由此，$k=\frac{2}{3}$。这样一来，所求的方程为：$y=\frac{2}{3}x+2$。

54. 求通过点（－5，－2），且在OY轴上的截距$b=-12$的直线的方程。

55. 求通过点（2，6），且与OX轴组成的角为arctg 5的直线的方程。

解：为了求直线的方程，必须先计算k和b。我们求得斜率$k=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}5)=5$。将已知点的坐标和求得的$k$值代入方程（5.6），得$6=5\times 2+b$。由此，$b=-4$。因而，所求的方程为$y=5x-4$。

56. 根据下列条件建立直线的方程：1）直线通过点（5，－7），且与OX轴组成的角为arctg(－2)；2）直线通过点（－1，－4），且与OX轴组成的角为135°。

§4. 直线的点斜式方程

通过已知点$A(x_A, y_A)$且有确定方向的直线的方程，其形式为：

$$y-y_A=k(x-x_A)。\tag{5.8}$$

这里$k=\mathrm{tg}\alpha$，即直线的斜率。

方程（5.8）可看作是一束直线的方程，即通过平面上同一点$A(x_A, y_A)$的所有直线的集合。我们发现，在通过点A的所有直线中，只有一条直线垂直于OX轴。它的方程不能用方程(5.8)的形式表示，它的方程具有形式 $x=x_A$。

57. 求通过点$A(5, -1)$，且斜率$k=3$的直线的方程。

解：按照已知条件，我们有$x_A=5$，$y_A=-1$，$k=3$。将这些值代入方程（5.8）中，得：

$$y+1=3(x-5)，或3x-y-16=0。$$

58. 求满足下列条件的直线方程：1）直线通过点$(-1, -1)$且斜率$k=1$；2）直线通过点（2，0）且斜率$k=-2$。

59. 求通过点$(-3, -2)$且与OX轴的交角为arctg 2的直线的方程。

解：根据已知条件，$x_A=-3$，$y_A=-2$。我们求得$k=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,2)=2$。将这些值代入方程（5.8），得：

$$y+2=2(x+3)，或2x-y+4=0。$$

60. 求满足下列条件的直线方程：

1）直线通过点（4，－5）且与OX轴组成的角为

arctg（－3）；

2）通过点（2，3）且与OX轴组成45°角；

3）通过点（0，5）且与OX轴组成135°角。

§5. 直线的两点式方程

形式为

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A) \tag{5.9}$$

的方程为通过两个已知点$A(x_A, y_A)$和$B(x_B, y_B)$的直线的方程。

过点A和B的直线的斜率，可由下式求得：

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}。 \tag{5.10}$$

61. 求通过点$A(2, -3)$和$B(-1, 4)$的直线的方程。

解：根据已知条件，我们有 $x_A=2$，$x_B=-1$，$y_A=-3$，$y_B=4$。将这些值代入方程（5.9），得：

$$y+3=\frac{4+3}{-1-2}(x-2)，或 7x+3y-5=0。$$

62. 求通过下列两点的直线的方程：1）$A(-1, -1)$和$B(-2, -2)$；2）$A(3, 0)$和$B(0, 4)$。

63. 已知三角形的顶点为：1）$A(-3, -2)$，$B(1, 5)$和$C(8, -4)$；2）$A(-1, -3)$，$B(3, 5)$和$C(4, 0)$。求三角形各边的方程。

64. 1）已知三角形的顶点为：$A(-3, 4)$，

B（－4，－3）和C（8，1）。试建立中线AD的方程。

2）已知三角形的顶点为：A（2，5），B（－6，－4）和C（6，－3）。求中线BD的方程。

65. 求通过点A（2，3）和B（－3，1）的直线对于OX轴的倾斜角。

解：由已知条件，我们有$x_A=2$，$x_B=-3$，$y_A=3$和$y_B=1$。按照公式（5.10），求得：

$$k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-3}{-3-2}=\frac{2}{5}=0.4。$$

由此得$\alpha=\text{arctg}0.4=21°48'$。

66. 已知直线通过两点：1）$A(-3, -3)$和$B(2, 1)$；2）A（3，1）和B（4，－2）。求直线在OX轴上的倾斜角。

67. 已知直线通过点A（6，2）和B（－3，8），求坐标轴被这条直线截得的线段的长。

解：将点A（6，2）和B（－3，8）的坐标代入方程（5.9），得：

$$y-2=\frac{8-2}{-3-6}(x-6)。$$

我们将这个方程化为直线的截距式方程：

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-6),\ y-2=-\frac{2}{3}x+4,$$

$$\frac{2}{3}x+y=6;\quad \frac{\frac{2}{3}x}{6}+\frac{y}{6}=1,\ \frac{x}{9}+\frac{y}{6}=1。$$

于是　$a=9$，$b=6$。

68. 1）已知直线通过点A（－1，－6）和B（7，

2）。求这条直线截得OX轴和OY轴上的线段的长；

2）作直线运动的点通过点$A(12, -1)$和$B(3, 2)$。求这个动点在怎样的点穿过OY轴。

69．通过点（-5，1）的直线在OY轴上截得的线段$b=6$。求这条直线的方程。

解：所求的直线与OY轴交于点（0，6）。将点$A(-5, 1)$和$B(0, 6)$的坐标代入方程（5.9），得所求的方程：

$$y-1=\frac{6-1}{0+5}(x+5), \text{或} x-y+6=0。$$

70．1）已知直线过点（-4，-1）且与OY轴交于点（0，3），试建立这条直线的方程。

2）已知直线过点（-2，4）且在OX轴上截得的线段$a=2$，求这条直线的方程。

§6．两条直线的交点

如果给出两条相交直线$A_1x+B_1y+C_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2=0$，那么，为了计算它们的交点的坐标，只需解由这两个直线方程组成的方程组。

71．求直线$3x-4y+11=0$和$4x-y-7=0$的交点。

解：解方程组

$$\begin{cases} 3x-4y+11=0, \\ 4x-y-7=0, \end{cases}$$

得$x=3$，$y=5$。所以，这两条直线的交点为（3，5）。

72．求两条直线的交点：

1）$y=3x$和$x+y+4=0$；

2）$x-2y-8=0$和$x+y-2=0$。

73．已知三角形三边的方程为：$x+3y-3=0$，$3x-11y-29=0$和$3x-y+11=0$。求这个三角形的顶点。

解：为了计算三角形三个顶点的坐标，需要解三个方程组：

$$\begin{cases} x+3y-3=0, \\ 3x-11y-29=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-11y-29=0, \\ 3x-y+11=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y+11=0, \\ x+3y-3=0. \end{cases}$$

解第一个方程组得，$x=6$，$y=-1$；解第二个方程组得$x=-5$，$y=-4$；解第三个方程组得$x=-3$，$y=2$。所以，三角形的三个顶点为：（6，－1），（－5，－4），（－3，2）。

74．已知三角形三边的方程为：1）$4x+3y+20=0$，$6x-7y-16=0$和$x-5y+5=0$；2）$7x+3y-25=0$，$2x-7y-15=0$和$9x-4y+15=0$。求三角形各顶点的坐标。

75．求垂直于向量$n=(4,3)$，且过直线$x+11y-27=0$和$6x-7y-16=0$的交点的直线方程。

解：我们先求已知直线的交点：

$$\begin{cases} x+11y-27=0, \\ 6x-7y-16=0 \end{cases} \iff (x=5,\ y=2)；\ M_1(5,2)。$$

再求向量$n=(4,-3)$和$\overrightarrow{M_1M}=(x-5,y-2)$的坐标形式的乘积并进行化简，就得所求的方程：

$$n\cdot\overrightarrow{M_1M}=(4,-3)(x-5,y-2)=0$$

$$\iff 4(x-5)-3(y-2)=0$$

$\Longleftrightarrow 4x-3y-14=0$。

76. 已知向量和直线：1）$n=(-3,2)$，$2x+3y-17=0$，$x+y-6=0$；2）$n=(-4,-5)$，$3x+y-10=0$，$2x+y-6=0$。求垂直于已知向量且过两直线交点的直线的方程。

§7. 两条直线间的角

给出一般式方程$A_1x+B_1y+C_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2=0$的两条直线间的夹角可按照下面的公式计算：

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}。\tag{5.11}$$

给出斜率的两条直线$y=k_1x+b_1$和$y=k_2x+b_2$间的夹角可按照下面的公式计算：

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}。\tag{5.12}$$

给出典型方程$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$和$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$的两条直线间的夹角可按照下面的公式计算：

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}。\tag{5.13}$$

公式（5.11）—（5.13）确定了两条已知直线间的两个角（锐角和钝角）中的一个角的三角函数值。为了求两条直线交成的锐角，应在这几个公式的右边取绝对值。

77. 求直线$y=5x$和$y=2x$交成的锐角（图57）。

解：已知直线的斜率等于5和2。按照公式（5.12），且右边取绝对值：

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{2-5}{1+2\times5}\right|=\frac{3}{11}$$

$$=0.2727;$$

$\varphi=15°15'$。

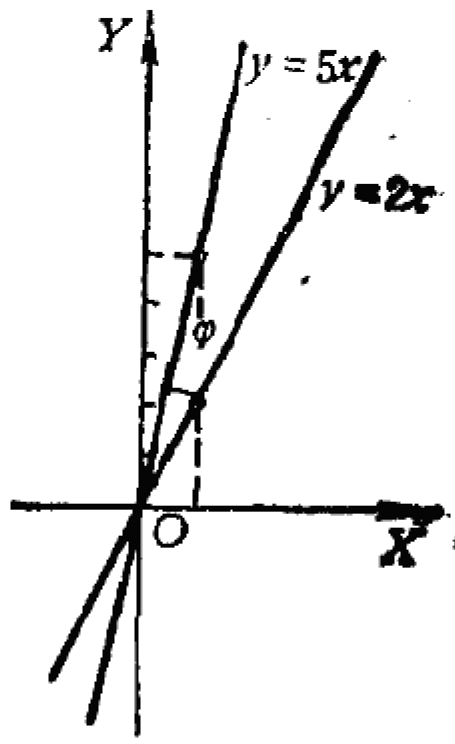


图 57

78．求两条直线交成的锐角：

1）$y=3x$和$y=-x$；

2）$2x-3y+6=0$和$3x-y-3=0$；

3）$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$和$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$。

79．求直线$5x-12y-16=0$和$3x+4y-12=0$交成的锐角。

解：按照公式（5.11），我们求得：

$$\cos\varphi=\left|\frac{5\times3-12\times4}{\sqrt{5^2+(-12)^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\frac{33}{65};$$

$$\varphi=\arccos\frac{33}{65}\approx59°29'。$$

80．求直线$3x+4y-12=0$和$15x-8y-45=0$交成的锐角。

81．求直线$\frac{x-5}{-24}=\frac{y-2}{7}$和$\frac{x+4}{8}=\frac{y-3}{15}$交成的锐角。

解：根据公式（5.13），我们求得：

$$\cos\varphi=\left|\frac{-24\times8+7\times15}{\sqrt{(-24)^2+7^2}\cdot\sqrt{8^2+15^2}}\right|=\frac{87}{425};$$

$$\varphi=\arccos\frac{87}{425}\approx 78°11'。$$

82．求直线$\frac{x-1}{5}=\frac{y-4}{12}$和$\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{4}$交成的锐角。

83．已知三角形各边的方程为：

1）$7x+4y+9=0$，$x-8y+27=0$ 和$2x-y-6=0$；

2）$6x-y+13=0$，$3x+7y-1=0$ 和$3x-8y-31=0$；

3）$3x-2y-1=0$，$5x+4y-31=0$和$x-8y-15=0$。

求各三角形的三个内角。

84．求两条直线交成的锐角：

1）一条直线过$A_1(4，2)$和$B_1(1，-7)$两点，另一条直线过$A_2(-1，3)$和$B_2(8，6)$两点；

2）一条直线过$A_1(-6，7)$和$B_1(2，-5)$两点，另一条直线过$A_2(-5，2)$和$B_2(1，1)$两点。

85．求具有公共点$M(-2，-1)$的两条直线交成的锐角，其中一条直线过点$A(3，3)$，而另一条直线过点$B(3，-2)$。

86．已知三角形的顶点为$A(-6，-1)$，$B(4，6)$和$C(2，1)$，求这个三角形的内角。

解：我们先求出这个三角形各边的斜率：

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-(-1)}{4-(-6)}=\frac{7}{10}；$$

$$k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{1-6}{2-4}=\frac{5}{2}；$$

$$k_{CA}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{-1-1}{-6-2}=\frac{1}{4}。$$

于是，三角形的内角为：

$$\operatorname{tg}A=\frac{k_{AB}-k_{CA}}{1+k_{AB}k_{CA}}=\frac{\frac{7}{10}-\frac{1}{4}}{1+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{4}}=0.383;$$

$A=20°57'$；

$$\operatorname{tg}B=\frac{k_{BC}-k_{AB}}{1+k_{BC}k_{AB}}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{7}{10}}{1+\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{10}}=0.6545;$$

$B=33°12'$；

$$\operatorname{tg}C=\frac{k_{BC}-k_{CA}}{1+k_{BC}k_{CA}}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}}{1+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}}=1.3846,$$

$C=54°10'$。

将求得的角相加，得

$20°57'+33°12'+54°10'$

$=108°19'$。

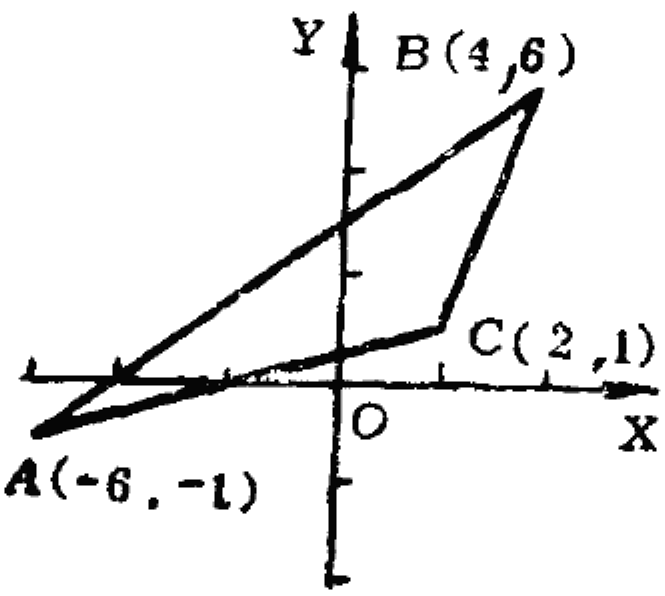


图 58

三角形的内角和小于180°，是因为算出的角中有一个角不是内角，而是与它相邻的外角。从作出的三角形可以看出，角 C 是钝角（图58），它等于$180°-54°10'=125°50'$。这样，三角形的内角和为：$20°57'+33°12'+125°50'=179°59'$（计算误差为$1'$）。

如果不作出三角形，也容易证明给定的三角形中有一个

内角是钝角。我们先计算三角形的边长：

$$AB=\sqrt{(-6-4)^2+(-1-6)^2}=\sqrt{149};$$

$$BC=\sqrt{(4-2)^2+(6-1)^2}=\sqrt{29};$$

$$AC=\sqrt{(-6-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{68}。$$

显然，如果三角形的长边的平方大于另两边的平方和，那么这个三角形为钝角三角形。由于 $AB^2>BC^2+AC^2$，那么边 AB 所对的角为钝角。

87．已知三角形的顶点为：1）$A(-6,-3)$，$B(6,7)$ 和 $C(2,-1)$；2）$A(0,4)$，$B(4,-2)$ 和 $C(-4,-2)$。求三角形的内角。

88．已知三角形的顶点为 $A(6,8)$，$B(2,-4)$ 和 $C(-6,4)$。求三角形的边 AB 与由顶点 A 引的中线间的夹角。

89．已知三角形的顶点为 $A(-2,2)$，$B(6,4)$ 和 $C(2,-6)$。求边 AC 与由顶点 A 引的中线间的夹角。

90．求两直线所夹的锐角：

1）直线 $3x+2y+4=0$ 和过点 $A(4,3)$ 和 $B(2,-2)$ 的直线；

2）直线 $x+2y-4=0$ 和过点 $A(1,5)$ 和 $B(-4,3)$ 的直线；

3）过点 $A(-1,-3)$ 和 $B(5,1)$ 的直线与直线 $2x+y+8=0$。

91．过坐标原点引两条直线，它们将直线 $x+3y-9=0$ 与坐标轴两交点间的线段，由 OX 轴的交点到 OY 轴的交点分成的线段比为1:3:2。求这两条直线交成的锐角。

92．直线 $x+2y-6=0$ 与坐标轴相交。两个交点间

的线段被过点M（4，3）的两条直线分成三部分，由OX轴的交点到OY轴的交点之间三部分的比为3∶1∶2。求过点M和分点的两条直线交成的锐角。

93．直线$3x+2y-18=0$与坐标轴相交于两点，这两点之间的线段被过点C（8，7）的两条直线分成三等分。求过点C的两条直线交成的锐角。

94．直线$2x+y+10=0$与坐标轴相交于两点，这两点之间的线段被过点M（－6，－8）的两条直线由与OX轴的交点到与OY轴的交点分成的三线段的比为1∶2∶2。求过点M的两条直线交成的锐角。

95．求过点A（2，3）且与直线$2x-y-1=0$交成角$\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$的直线的方程。

解：显然，本题有两解。因为在公式（5.12）中，已知直线的斜率可以等于k_1和k_2。

1）$k_1=2$；$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{4}{3})=\frac{k_2-2}{1+2k_2}$，或$\frac{4}{3}=\frac{k_2-2}{1+2k_2}$。

解这个方程，$k_2=-2$。因此，所求的方程为：

$$y-3=-2(x-2)，或 2x+y-7=0。$$

2）$k_2=2$；$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{4}{3})=\frac{2-k_1}{1+2k_1}$，由此$k_1=\frac{2}{11}$。因此，我们有

$$y-3=\frac{2}{11}(x-2)，或 2x-11y+29=0。$$

96．求满足下列条件的直线的方程并求它与已知直线的交点：

1）过点（－2，5）且与直线$3x-y+4=0$交成

角 arctg $\frac{1}{7}$；

2）过坐标原点且与直线$x-y+1=0$交成45°角。

97．通过坐标原点的两条直线的夹角为 arctg $\frac{1}{3}$，它们的斜率比等于$\frac{2}{7}$。求这两条直线的方程。

98．通过坐标原点的两条直线的夹角为 arctg $\frac{7}{9}$，它们的斜率比为$\frac{9}{2}$。求这两条直线的方程。

99．已知三角形的顶点为$A(2, -1)$，$B(-7, 3)$和$C(-1, 5)$，求角C的平分线的方程。

解：我们先求角C的平分线与边AB的交点M。显然，三角形的角平分线分对边成两部分与两邻边成比例。因此，$\lambda=BM:MA=CB:CA$。由于

$$CB=\sqrt{(-1+7)^2+(-5-3)^2}=10,$$

$$CA=\sqrt{(-1-2)^2+(-5+1)^2}=5,$$

那么$\lambda=\frac{10}{5}=2$。

下面我们来计算点M的坐标：

$$x_M=\frac{-7+2\times 2}{1+2}=-1,\ y_M=\frac{3+2(-1)}{1+2}=\frac{1}{3},$$

$$M(-1, \frac{1}{3})。$$

点C和点M的横坐标相等，那么角C的平分线平行于Oy轴：$x=-1$或$x+1=0$。

100. 三角形的三个顶点为$A(-6,-2)$，$B(4,8)$和$C(2,-10)$。求角A的平分线的方程。

§8. 两条直线平行的条件

由直线方程的一般式$A_1x+B_1y+C_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2=0$确定的两条直线平行的条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_2}{B_2}。$$

给定了斜率的两条直线$y=k_1x+b_1$和$y=k_2x+b_2$平行的条件为

$$k_2=k_1。$$

给出了典型方程$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$和$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$的两条直线平行的条件为

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}。$$

101. 检验下列直线是否互相平行：

1）$2x-3y+4=0$和$10x-15y-7=0$；

2）$25x-20y-8=0$和$5x+4y+4=0$；

3）$y=-2x+8$和$y=-2x+1$；

4）$y=3x+4$和$y=-3x+2$。

102. 当参数a为怎样的值时，直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{5}$和

$\frac{x+6}{4}=\frac{y-2}{a}$互相平行？

103．求过点M（－2，4）且平行于直线$2x-3y+6=0$的直线的方程（图59）。

解：将已知方程写为$y=\frac{2}{3}x+2$，我们求得它的斜率$k_1=\frac{2}{3}$。由于已知直线和所求的直线平行，那么它们的斜率相等，即$k_2=k_1=\frac{2}{3}$。由于所求的直线过点$M(-2,4)$，并且它的斜率$k_2=\frac{2}{3}$，所以它的方程可以写为

$$y-4=\frac{2}{3}(x+2)，或2x-3y+16=0。$$

104．求下列直线的方程：

1）过点$A(-3,2)$且平行于直线$5x-3y+21=0$；

2）过点$A(-1,-4)$且平行于直线$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$。

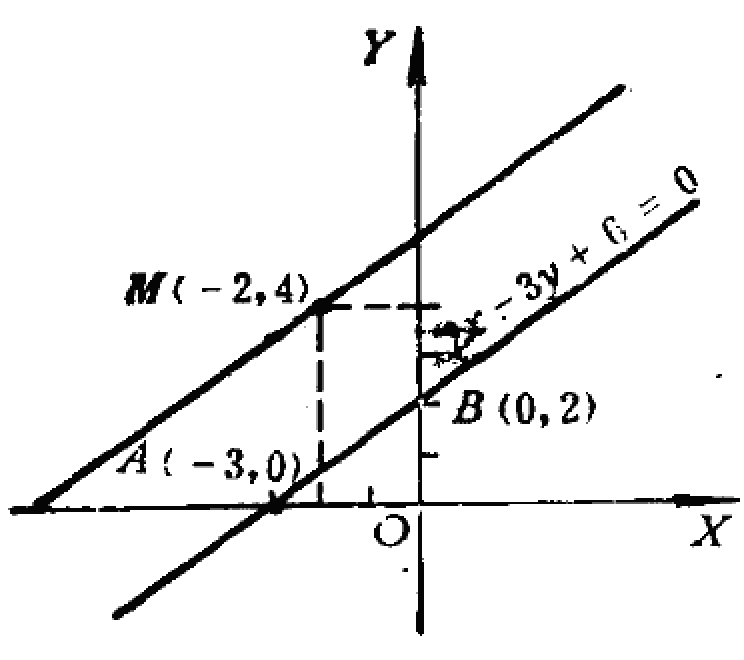


图 59

105．求下列直线的方程：

1）过点$M(-3,-1)$且平行于直线AB，这里有$A(-2,6)$和$B(3,-1)$；

2）过点（1，－4）且平行于过点$A(-3,1)$和$B(3,2)$的直线。

106．求下列直线的方程：

1）过直线 $x+y-4=0$ 和 $x-y=0$ 的交点，且平行于直线 $x-4y+4=0$；

2）过直线 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ 和 $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$ 的交点，且平行于直线 $x-2y-6=0$。

§9. 两条直线垂直的条件

给出了一般式方程 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的两条直线互相垂直的条件为

$$A_1A_2+B_1B_2=0。$$

给出了斜率的两条直线 $y=k_1x+b_1$ 和 $y=k_2x+b_2$ 互相垂直的条件为

$$k_2=-\frac{1}{k_1}，或 k_2\cdot k_1=-1。$$

给出了典型方程 $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$ 和 $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$ 的两条直线互相垂直的条件为

$$m_1m_2+n_1n_2=0。$$

107. 检验下列直线是否互相垂直：

1）$3x-4y+12=0$ 和 $4x+3y-6=0$；

2）$4x+5y-8=0$ 和 $3x-2y+4=0$；

3）$\frac{x-x_1}{2}=\frac{y-y_1}{3}$ 和 $\frac{x-x_2}{3}=\frac{y-y_2}{-2}$；

4）$\frac{x-x_1}{5}=\frac{y-y_1}{-4}$ 和 $\frac{x-x_2}{4}=\frac{y-y_2}{5}$。

108． 当k为何值时，直线 $y=5x-4$ 和$y=kx-2$互相垂直？

109． 求过点 $M(2, 3)$ 且垂直于直线$5x-4y-20=0$的直线的方程（图60）。

解：已知直线的斜率$k_1=\frac{5}{4}$，那么所求直线的斜率$k_2=-\frac{4}{5}$。因而，所求的直线的方程为

$$y-3=-\frac{4}{5}(x-2)，或4x+5y-23=0。$$

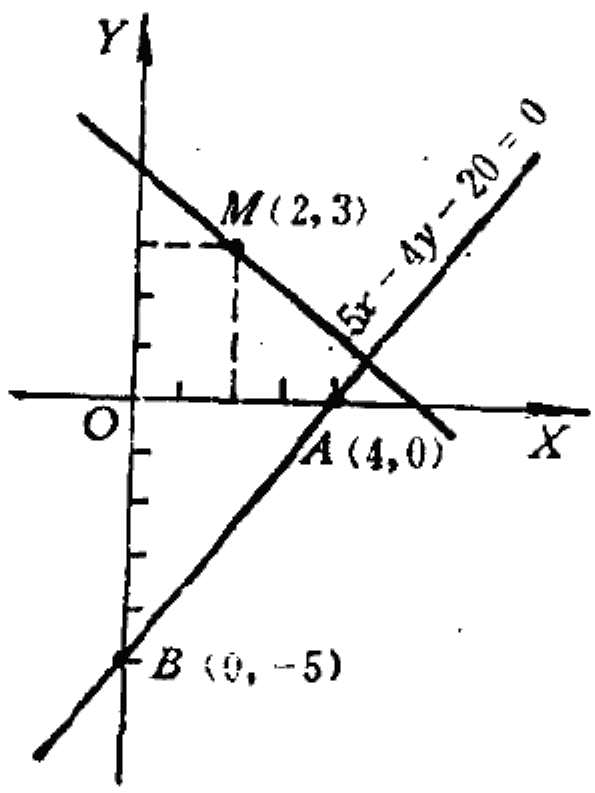


图 60

110． 求下列直线的方程：

1）过点 $M(4, -3)$ 且垂直于直线 $5x-2y+10=0$；

2）过点 $M(-4, 1)$且垂直于直线 $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$；

3）过坐标原点且垂直于直线$2x+3y-12=0$。

111． 求过点（2，4），且垂直于直线MN的直线，这里有$M(-2, 6)$和$N(3, -3)$。

112． 一条直线过点（－4，1）和（2，－5）。另一条直线过它与OY轴的交点且垂直于已知直线。求这两条直线的方程。

113． 已知一条直线与OX轴相交于点（2，0），与

OY 轴相交于点（0，－6）。求过坐标原点且与已知直线垂直的直线的方程。

114． 求过直线 $x+2y+4=0$ 和 $3x-y-9=0$ 的交点且与直线 $x+y-7=0$ 垂直的直线的方程。

115． 一条直线过直线 $x+y-5=0$ 和 $x-y+3=0$ 的交点，而且垂直于过点（－2，0）和（0，－3）的直线。求这条直线的方程。

116． 一条直线垂直于线段 AB，且过它的中点。如果有：1）$A(-2,1)$，$B(4,4)$；2）$A(-1,4)$，$B(3,-2)$。求这条直线的方程。

117． 一条直线过直线 $3x-7y+21=0$ 上的在两坐标轴之间的线段的中点，而且垂直于这条线段。求这条直线的方程。

118． 已知三角形的顶点为：1）$A(-4,2)$，$B(6,5)$ 和 $C(1,-4)$；2）$A(2,-3)$，$B(7,2)$ 和 $C(-8,-2)$；3）$A(4,2)$，$B(6,-5)$ 和 $C(-5,4)$。求三角形高线的方程。

119． 求三角形的高线的方程，如果三角形的边的方程为：1）$11x+2y-21=0$，$8x-3y+7=0$ 和 $3x+5y+21=0$；2）$2x-y+5=0$，$x+y-5=0$ 和 $x-2y-5=0$；3）$3x-10y+28=0$，$5x+4y+26=0$ 和 $4x-3y-4=0$。

120． 求点 $M(6,8)$ 到直线 $4x+3y+2=0$ 的距离。

解：点 M 到已知直线的距离等于由点 M 向已知直线作垂线的线段长（图61）。我们来建立这条垂线的方程并求出它与已知直线的交点。

已知直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=-\frac{4}{3}$，那么与已知直线垂直的直线的斜率为 $k_{MN}=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{3}{4}$。因而，垂线的方程为：

$$y-8=\frac{3}{4}(x-6)，或 3x-4y+14=0。$$

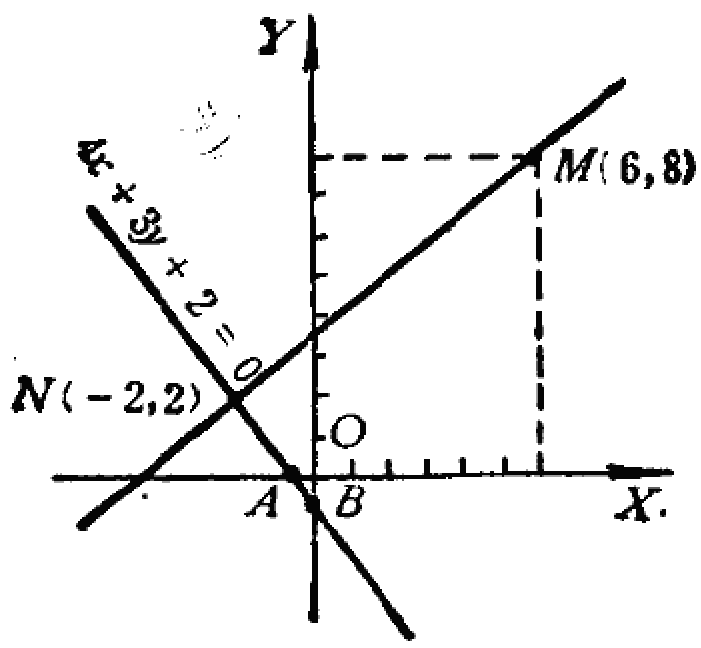


图 61

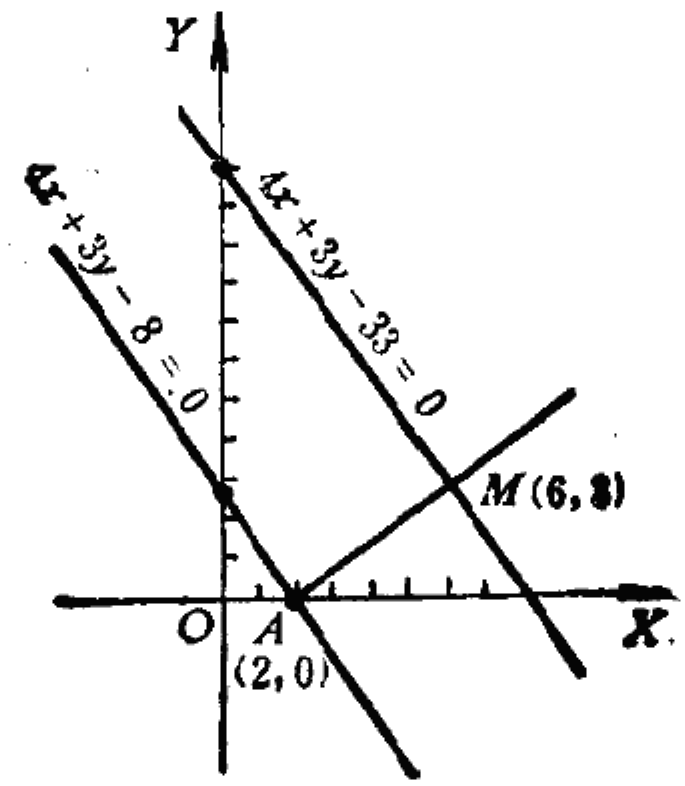


图 62

为了求点 N 的坐标，我们来解方程组：

$$\begin{cases}4x+3y+2=0,\\ 3x-4y+14=0;\end{cases}$$

由此得 $N(-2, 2)$。

所求的距离为：

$$MN=\sqrt{(6+2)^2+(8-2)^2}=10。$$

121．求下列距离：1）由点 $M(-2, 4)$ 到直线 $4x-3y-5=0$；2）由点 $(4, 6)$ 到直线 $3x+4y$

$+14=0$。

122. 求两条平行直线$4x+3y-8=0$（AB）和$4x+3y-33=0$（CD）之间的距离（图62）。

解：过一条直线上的任意一点作垂线同另一条直线相交计算交点的坐标，求出这两点之间的距离。

直线AB的斜率为$k_{AB}=-\frac{4}{3}$。过点A（2，0）垂直于直线AB的直线AM的斜率为$k_{AM}=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{3}{4}$。于是，垂线的方程为

$$y-0=\frac{3}{4}(x-2)，或3x-4y-6=0。$$

解由直线CD和AM组成的方程组，求得垂线AM同直线CD的交点：

$$\begin{cases}4x+3y-33=0,\\3x-4y-6=0;\end{cases} M(6,3)。$$

最后我们求得点A和点M之间的距离：

$$AM=\sqrt{(2-6)^2+(0-3)^2}=5。$$

123. 求两条平行线之间的距离：

1）$4x+3y+33=0$和$4x+3y-17=0$；

2）$12x+5y-101=0$和$12x+5y+68=0$。

§10. 综　合　题

124. 当k为何值时，直线$y=kx+9$通过直线$x-y+5=0$和$x+2y+2=0$的交点？

125. 过点$M(2,5)$的直线同OX轴交成的角等于$\operatorname{arctg} 3$。在这条直线上求横坐标为-2的点。

126. 直线$x+2y-4=0$夹在两坐标轴之间的线段，被通过坐标原点的两条直线分成三段的比为1:2:1。求这两条直线的方程。

127. 直线$\frac{x}{9}+\frac{y}{3}=1$夹在两坐标轴之间的线段被通过坐标原点的两条直线分成三等分。求这两条直线的方程。

128. 已知三角形三边的方程为：$6x-5y+8=0$，$4x+y-38$和$x-3y-3=0$。求这个三角形三条中线的方程。

129. 已知三角形三边的方程为：$4x-5y+22=0$，$5x-2y+2=0$和$x+3y+14=0$。求过三角形中线的交点和点（1，－3）的直线的方程。

130. 在直线$2x+3y-18=0$上求一点，使它到OY轴的距离比到OX轴长2倍。

131. 已知一条过坐标原点的直线与OX轴交成的角是直线$y=0.2x$与OX轴交成的角的2倍。求这条直线的方程。

132. 一条过点（8，5）的直线与OX轴的夹角为直线$x-4y+4=0$与OX轴的夹角的2倍。求这条直线的方程。

133. 求过点（－7，8）且与直线$3x-5y+15=0$交成45°角的直线的方程。

134. 求过直线$5x-4y-20=0$同两坐标轴的交点，且垂直于这条直线的两条垂线的方程。

135. 已知三角形的顶点为：$A(-5,-2)$，$B(7,6)$

和C（5，-4），求：1）边AB的方程；2）由顶点A引的中线的方程；3）由顶点C引的高线的方程；4）角B和角C；5）这个三角形的重心。

136. 已知两条平行直线$x-y-7=0$和$x-y+3=0$。求平行于这两条平行线，且将这两条平行线间的距离分为3∶2的直线的方程（由纵坐标较小的点到纵坐标较大的点）。

137. 已知一条直线过点A（-4，2）和B(8，4)。由将AB（由A到B）分为3∶4的点作已知直线的垂线，求垂线的方程。

138. 已知菱形的两条边的方程为：$3x-10y+37=0$和$9x+2y-17=0$。菱形的一条对角线的方程为$3x-2y-19=0$。求菱形的另外两条边及另一条对角线的方程。

139. 已知平行四边形的两条边的方程为$3x-2y+12=0$和$x-3y+11=0$，对角线的交点为（2，2）。求平行四边形另两条边及两条对角线的方程。

140. 由平行四边形的一个顶点出发的两条边的方程为$5x-3y+28=0$和$x-3y-4=0$，与这个顶点相对的顶点的坐标为（10，6）。求平行四边形另两条边及两条对角线的方程。

141. 正方形的两个相对顶点为$A(-1,1)$和$C(5,8)$。求这个正方形的边及对角线的方程。

142. 一个等腰直角三角形的斜边的方程为$x-2y-3=0$，直角顶点为C（1，6）。求直角边的方程。

143. 由点A(3，10)射出的光线，射到直线$2x+y-6=0$上发生反射。反射线通过点B（7，2）。求入射线和反射线的方程。

小 测 验

第一组

已知三角形的顶点为：$A(-7,3)$，$B(2,-1)$和$C(-1,-5)$，求：

1） 平行于边BC的直线AM的方程；

2） 中线AD的方程；

3） 高线BF的方程；

4） 角B；

5） 角平分线CN的方程。

第二组

已知三角形的顶点为：$A(-8,-2)$，$B(2,10)$和$C(4,4)$，求：

1） 平行于边AC的直线BN的方程；

2） 中线CD的方程；

3） 高线AE的方程；

4） 角B；

5） 三角形的重心。

第六章　平面上点的集合、二次曲线

§1. 平面上点的集合

平面上关于变量x和y的方程对应于某一条线，是指坐标适合这个方程的点集；相反地，与变量x和y的方程相对应的点集，是平面上的一条线。

由已知条件建立平面上点的集合的方程，需要找出变量x和y（属于这个点集的任意点的坐标）与题中给出的固定参数之间的相依关系，并用方程写出这种关系。

1. 求平面上到点$A(2, 4)$和$B(4, 6)$等距离的点集的方程。

解：设点$M(x, y)$属于所求的点集(图63)，那么$MA=MB$。由于

$$MA=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2},$$

$$MB=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2},$$

那么

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}。$$

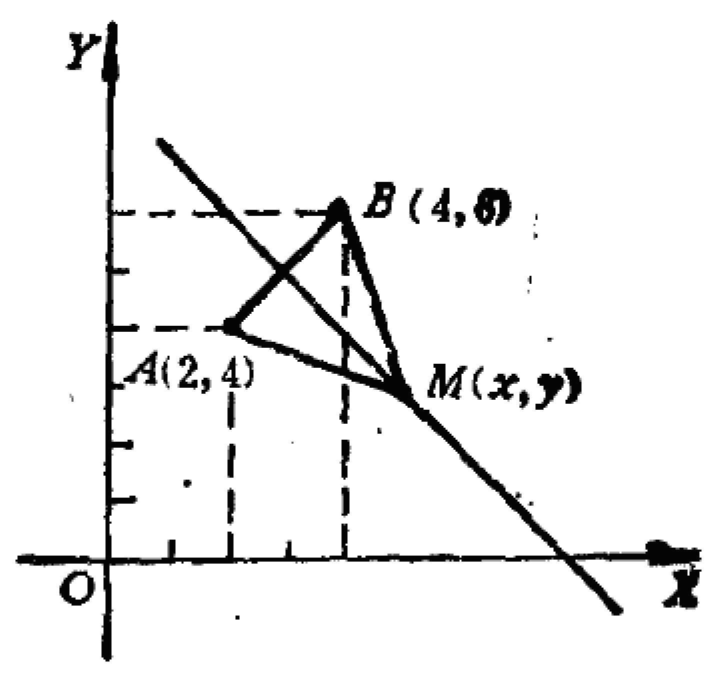


图 63

将左右两边平方并化简，得

$$(x-2)^2+(y-4)^2=(x-4)^2+(y-6)^2,$$

或 $x+y-8=0$。

直线$x+y-8=0$就是具有条件中指出的性质的点的集合。这条直线就是线段AB的垂直平分线。

2． 求平面上到点$A(-4,\ 2)$和$B(6,\ -8)$等距离的点集的方程。

3． 求平面上到坐标原点的距离为r的点集。

解：由条件可知，对于所求的集合的任意点$M(x,\ y)$都有等式$OM=r$。由于$OM=\sqrt{x^2+y^2}$，那么可得

$$\sqrt{x^2+y^2}=r，\text{或}x^2+y^2=r^2。$$

所求的点集是以坐标原点为圆心，r为半径的圆（图64）。

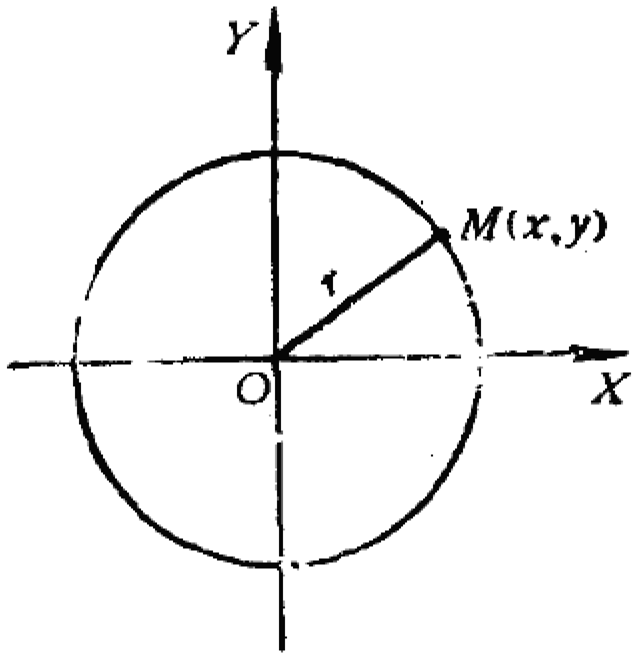


图 64

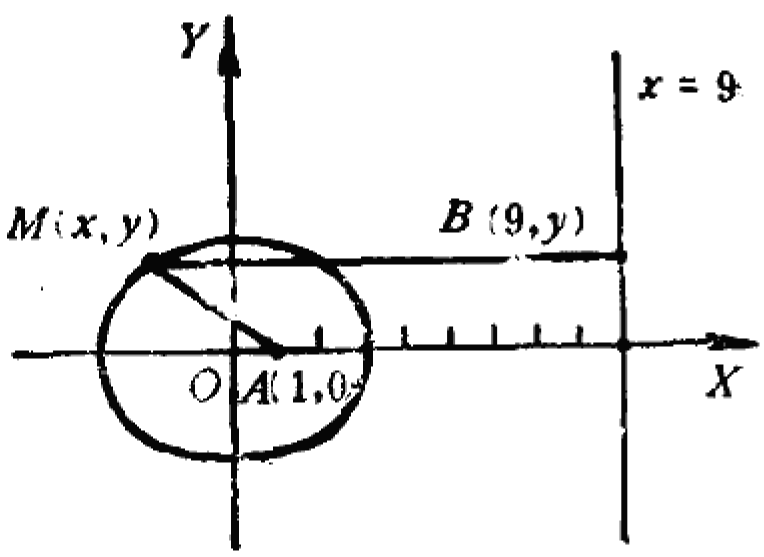


图 65

4． 求平面上到点$A(6,\ 0)$的距离为到点$B(2,\ 0)$的距离3倍的点集的方程。

5． 求平面上到两个已知点$A(-6,\ 0)$和$B(6,\ 0)$的距离的平方和等于常数104的点集。

6． 求平面上到两个已知点$A(0,\ -2)$和$B(0,\ 2)$的距离的平方和等于常数33的点集的方程。

7．求平面上到点 $A(1,0)$ 的距离与到直线$x=9$的距离的比等于$\lambda=\frac{1}{3}$的点集的方程。

解：由题设条件可知，对于所求的集合的任意点 $M(x,y)$，有关系式$MA:MB=\frac{1}{3}$（图65）。由于

$$MA=\sqrt{(x-1)^2+y^2}, \quad MB=\sqrt{(x-9)^2}=|x-9|,$$

那么

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-9|}=\frac{1}{3}，\text{或} 3\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-9|。$$

将左右两边平方并化简，得：

$$9(x-1)^2+9y^2=|x-9|^2，\text{即} 8x^2+9y^2=72，$$

$$\text{或}\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1。$$

8．求平面上到点$A(3,0)$的距离与到直线 $x=12$ 的距离的比为$\lambda=\frac{1}{2}$的点集的方程。

9．一个动点M在平面上运动，它到点$A(1,0)$的距离为到直线$x=4$的距离的一半。求动点M的轨迹方程。

10．求平面上到点$A(8,0)$的距离为到直线$x=2$的距离2倍的点集的方程。

解：由题设条件可知，对于所求的集合的任意一点都有等式$2MB=MA$（图66）。由于

$$MB=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|,$$

$$MA=\sqrt{(x-8)^2+y^2}$$

那么

$$2\cdot|x-2|=\sqrt{(x-8)^2+y^2}。$$

将方程两边平方并化简，得

$$3x^2-y^2=48，或\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1。$$

11．一个动点M在平面上运动，它的轨迹上的每一点到点$A(9，0)$的距离为到直线$x=1$的距离的2倍，求动点M的轨迹方程。

12．求平面上到点$A(0，-2)$和到OX轴等距离的点集的方程。

13．求平面上到OY轴和到点$A(3，0)$等距离的点集的方程。

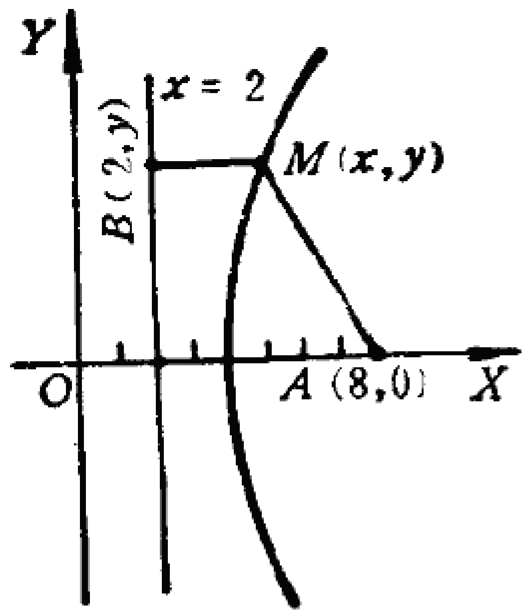


图 66

14．求平面上满足下列条件的点集的方程：

1）到直线$x=4$和到点$A(-2，3)$等距离；

2）到直线$y=-2$和点$A(-3，4)$等距离。

15．一个动点在平面上运动。如果它的轨迹上的每一点到点$A(2，-1)$的距离的平方与到OX轴的距离的平方相等，求这个动点的轨迹方程。

16．一个动点在平面上运动，它到点$A(-3，4)$的距离的平方等于到OX轴的距离的2倍。求这个动点的轨迹方程。

17．如果平面上某个点集的每一点的横坐标都是这点的纵坐标和这点同点$A(1，0)$的连线长度的比例中项，求这个点集。

18．如果平面上某个点集的每一点到坐标原点的距离都

是这点的坐标的比例中项，求这个点集。

19. 求具有下述性质的点集的方程：连结点集的每一点与点$A(2, 3)$的直线的斜率是连结这点与点$B(5, 1)$的直线的斜率的二分之一。

§2. 圆

平面上，到一个定点(圆心)的距离相等的所有点的集合称为圆。

圆心在坐标原点，半径为r的圆的方程为：

$$x^2+y^2=r^2。\tag{6.1}$$

圆心在$O_1(a, b)$，半径为r的圆的方程为：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2。\tag{6.2}$$

圆的方程的一般形式可以写成：

$$Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0,\tag{6.3}$$

这里A，B，C，D为常数，$A\neq 0$且$B^2+C^2-4AD>0$。

20. 检验：

1) 点$A(2, 4)$，$B(7, 1)$和$C(0, 2)$是否属于圆$x^2+y^2-2x-4y=0$；

2) 点$K(-4, 3)$和$L(5, 0)$是否属于圆$x^2+y^2-4x-2y-35=0$。

21. 试建立圆心在点$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$，半径为2的圆的方程，并作出这个圆。

解：由题设条件，我们有$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{4}$，$r=2$。将这

些值代入公式（4.2），得

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left[y-\left(-\frac{3}{4}\right)\right]^2=4。$$

作圆：1）求出圆心，即 $O_1\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$；

2）以O_1为圆心，半径为2作圆（图67）。

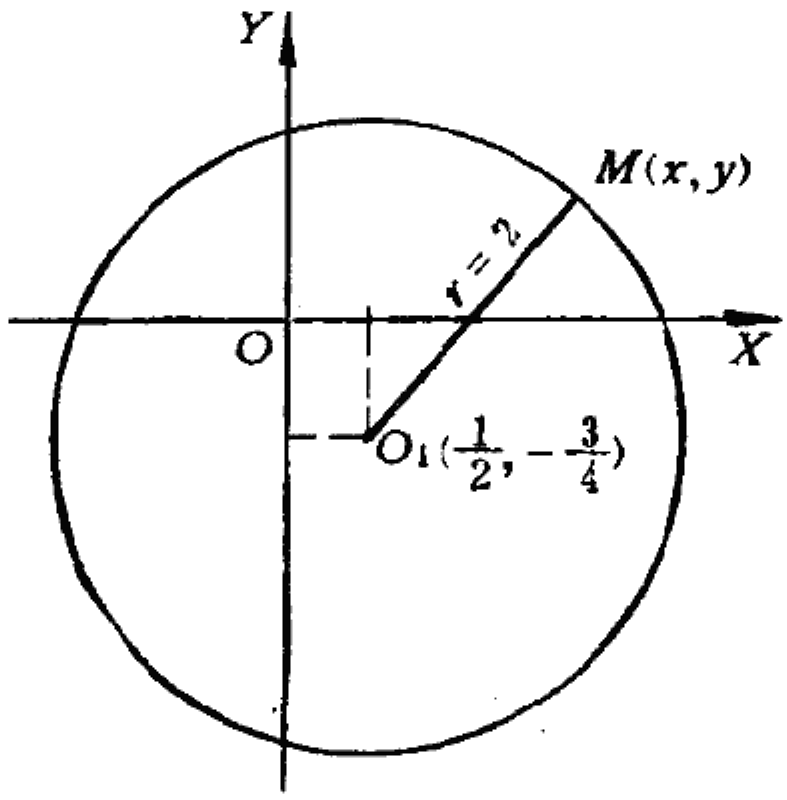


图 67

22．求下列圆的方程并作出这两个圆：

1）圆心在坐标原点，半径等于$\sqrt{3}$；

2）圆心在点$(-2,-5)$，半径等于3。

23．求以点（5，-7）为圆心且过点（2，-3）的圆的方程。

解：我们先求圆的半径，即由圆心到已知点的距离：

$$r=\sqrt{(2-5)^2+[-3-(-7)]^2}=5。$$

现在将圆心的坐标和求得的半径的值代入公式（6.2），得

$$(x-5)^2+(y+7)^2=25。$$

24．求圆的方程：

1）圆心在点$(-1,\ 4)$且通过点$(3,\ 5)$；

2）圆心在点$(-3,\ 0)$且通过点$(2,\ 4)$。

25．已知圆的直径的两个端点为：1）$(0,\ 3)$和$(6,-7)$；2）$(-2,\ 3)$和$(2,\ 5)$。求圆的方程。

26．求圆的方程：1）圆的直径为直线 $4x+3y-24=0$ 在两坐标轴之间的线段；2）圆的直径为直线 $5x-4y+40=0$ 在两坐标轴之间的线段。

27．求通过坐标原点，且圆心在下列各点的圆的方程：1）（－2，3）；2）（3，－5）。

28．求圆 $3x^2+3y^2-18x-10y-48=0$ 与坐标轴交点的坐标。

解：圆与横坐标轴的交点的纵坐标为零。设在圆的方程中 $y=0$，得

$$(3x^2-18x-48=0)\Longleftrightarrow(x^2-6x-16=0)$$
$$\Longleftrightarrow(x_1=-2,\ x_2=8)\text{。}$$

所以圆与横坐标轴的交点为（－2，0）和（8，0）。

圆与纵坐标轴的交点的横坐标为零。设在圆的方程中 $x=0$，得

$$(3y^2-10y-48=0)\Longleftrightarrow\left(y_1=-\frac{8}{3},y_2=6\right)\text{。}$$

所以圆与纵坐标轴交点为 $\left(0,\ -\frac{8}{3}\right)$ 和（0，6）。

29．求圆 $x^2+y^2+4x+y-12=0$ 与坐标轴的交点的坐标。

30．求圆 $x^2+y^2-4x+2y-29=0$ 和直线 $x-y-1=0$ 的交点坐标。

解：为了求圆与直线的交点坐标，我们解方程组：

$$\begin{cases}x^2+y^2-4x+2y-29=0,\\ x-y-1=0\end{cases}\Longleftrightarrow(x=-3,\ y=-4)$$

或（$x=5$，$y=4$）。

因此，圆与直线的交点为（－3，－4）和（5，4）。

31．求圆$x^2+y^2-8x-2y-8=0$和直线$4x+3y-19=0$的交点坐标。

32．求过点$A(3,1)$，$B(-2,6)$和$C(-5,-3)$的圆的方程。

解：设$O_1(a,b)$为所求的圆的圆心，那么$O_1A=O_1B=O_1C$为同一个圆的半径。我们有

$$O_1A=\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2},$$

$$O_1B=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2},$$

$$O_1C=\sqrt{(a+5)^2+(b+3)^2}。$$

我们建立关于未知数a和b的方程组，并解之：

$$\begin{cases}\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2},\\ \sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+5)^2+(b+3)^2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b+3=0,\\ 2a+b+3=0\end{cases}\Leftrightarrow(a=-2,\ b=1);$$

$$O_1(-2,1)。$$

我们求得$r=O_1A=\sqrt{(-2-3)^2+(1-1)^2}=5$。所以，圆的方程为：

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25。$$

33．求过下列各点的圆的方程：1）$(2,8)$，$(4,-6)$和$(-12,-6)$；2）$(-2,-6)$，$(-3,1)$和$(4,2)$。

34．已知三角形各边所在直线的方程为：1）$x-y+4=0$，$3x+y-16=0$和$x-2y-2=0$；2）$2x-y+2=0$，$x-3y-14=0$和$x+y-2=0$；3）$4x-3y-17=0$，$7x+y-61=0$和$x-7y-73=0$。

35．求与横坐标轴相切于点$A(3,\ 0)$且半径等于6的圆的方程。

解：设$O_1(a,\ b)$为圆心（图68）。切点的横坐标与圆心的横坐标相同（$a=3$）。圆心的纵坐标b为：

$$(3-3)^2+(0-b)^2=6^2;\ b=\pm 6。$$

即有两个圆心$O_1(3,\ 6)$和$O_2(3,\ -6)$。由此可得满足已知条件的两个圆的方程：

$$(x-3)^2+(y-6)^2=36 和 (x-3)^2+(y+6)^2=36。$$

36．求与纵坐标轴相切于点$A(0,\ 4)$且半径等于5的圆的方程。

37．求与纵坐标轴相切并通过点$A(4,\ 5)$和$B(18,\ -9)$的圆的方程。

解：设$O_1(a,\ b)$为所求的圆的圆心（图69）。引过切点$C(0,\ b)$的半径。圆的半径$r=a$。我们建立并解方程组：

$$\begin{cases}\sqrt{(a-4)^2+(b-5)^2}=a,\\ \sqrt{(a-18)^2+(b+9)^2}=a,\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b^2-10b-8a+41=0,\\ b^2+18b-36a+405=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (a=34,\ b=21) 或 (a=10,\ b=-3)。$$

因此有两个圆心$O_1(34,\ 21)$和$O_2(10,\ -3)$。有两个半径值$r_1=34$和$r_2=0$。即满足题设条件的圆有两个：

$$(x-34)^2+(y-21)^2=34^2 和 (x-10)^2+(y+3)^2=10^2。$$

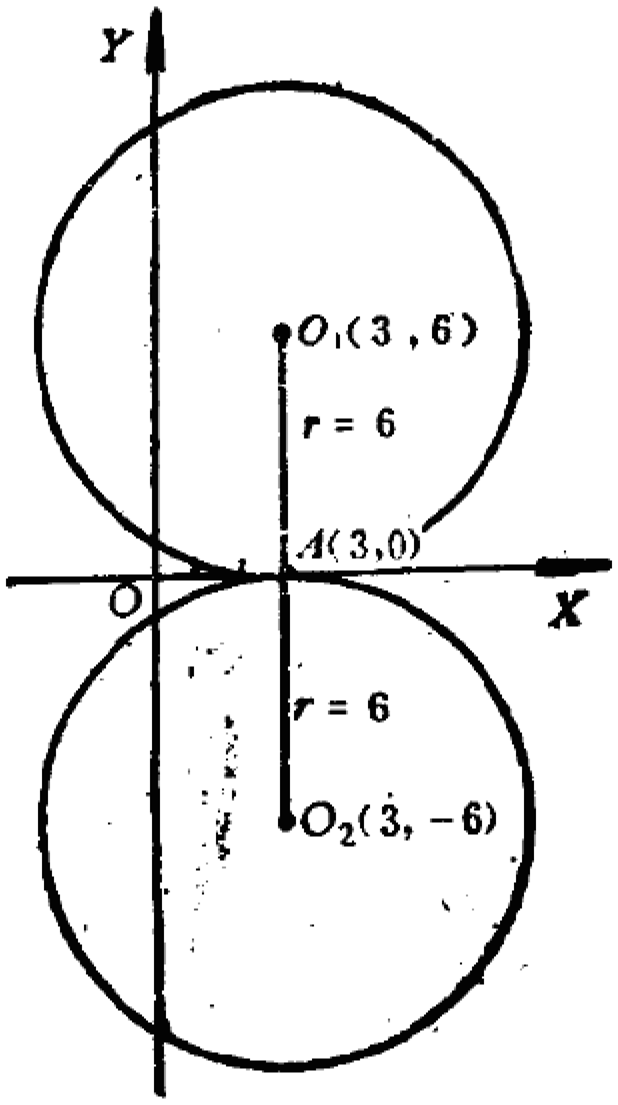


图 68

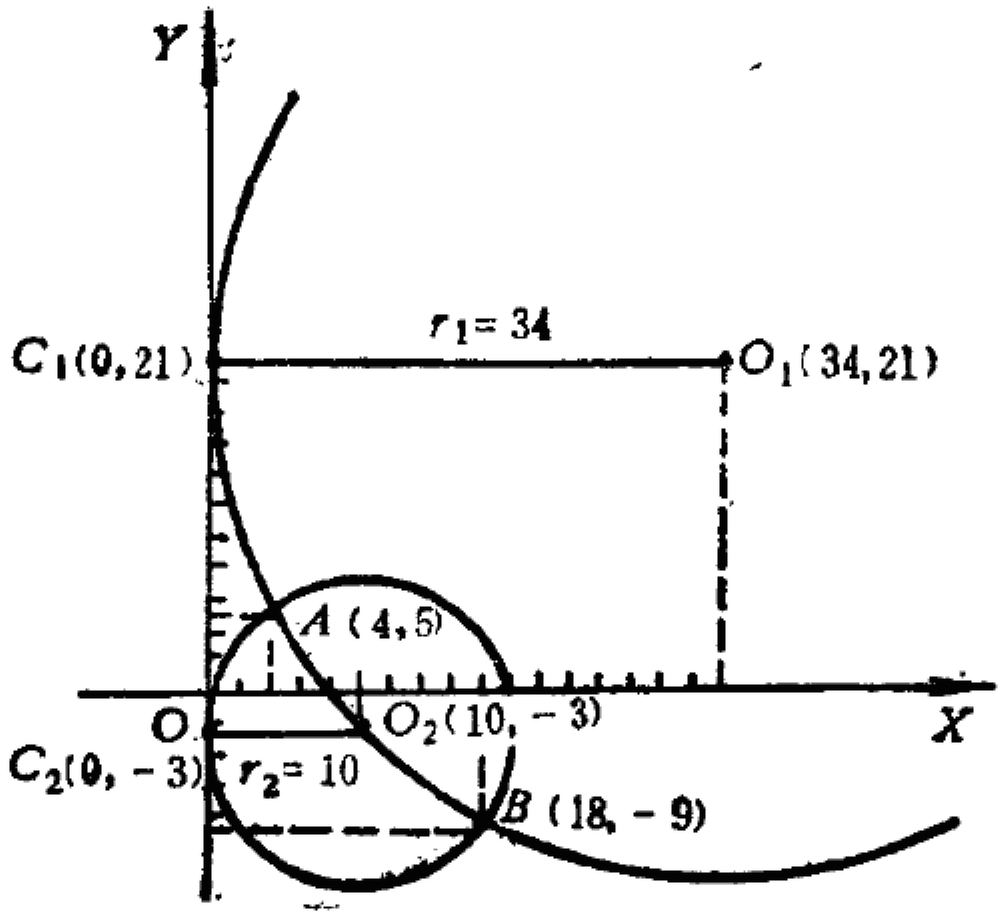


图 69

38．试建立与横坐标轴相切且通过点$A(7, 8)$和$B(6, 9)$的圆的方程。

39．试建立与两坐标轴相切并通过点$A(18, -4)$的圆的方程。

解：所求的圆与两坐标轴相切并通过第Ⅳ象限的点，它的圆心的坐标为$O_1(a, -a)$，这里$a>0$。圆的半径$r=a$（图70）。于是

$$\sqrt{(a-18)^2+(-a+4)^2}=a\Longleftrightarrow(a^2-44a+340=0)\Longleftrightarrow(a_1=10,\ a_2=34)。$$

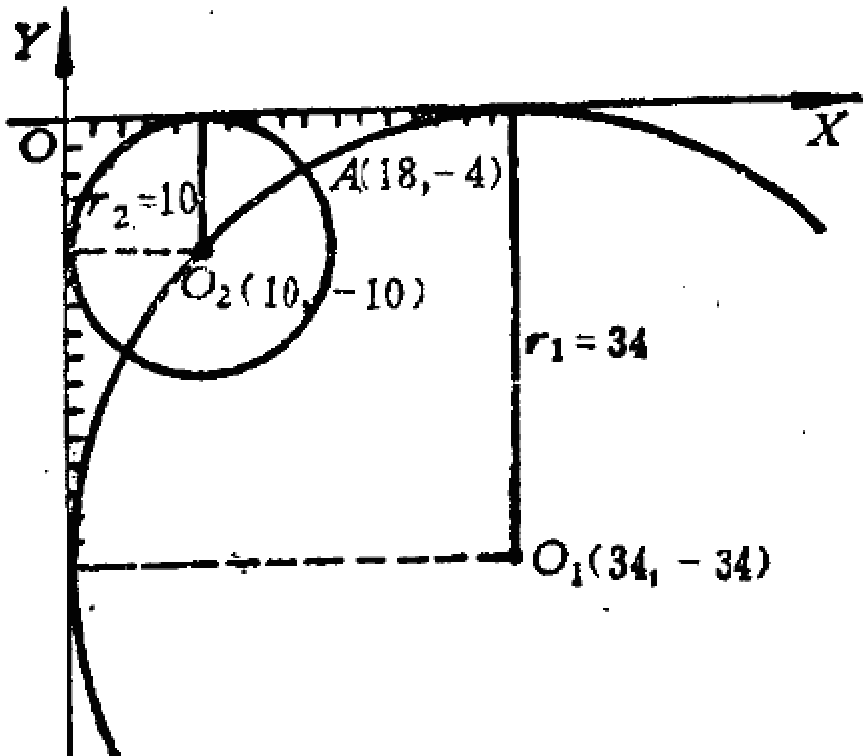


图 70

因而，有两个圆心$O_1(34, -34)$和$O_2(10, -10)$及两个半径$r_1=34$和$r_2=10$，

即满足题设条件的圆有两个：

$(x-34)^2+(y+34)^2=34^2$和$(x-10)^2+(y+10)^2=10^2$。

40．求与两坐标轴相切并通过点$A(8, 9)$的圆的方程。

41．求圆心在坐标原点且通过点$(-3, 4)$和$(-3, -4)$的圆的方程。

42．求通过点$A(8, 5)$和$B(-1, -4)$，圆心在横坐标轴上的圆的方程。

43．求通过点$A(3,7)$和$B(5, -1)$，并且圆心在纵坐标轴上的圆的方程。

44．一个圆经过点$A(5, 7)$和$B(-2, 4)$，它的圆心在直线$4x+3y-18=0$上，求这个圆的方程。

解：设$O_1(a, b)$为所求的圆的圆心，$O_1A=O_1B$为这个圆的半径。这样，我们求得：

$$\sqrt{(a-5)^2+(b-7)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(b-4)^2}$$

$$\Longleftrightarrow 7a+3b-27=0。$$

由于所求的圆的圆心在直线$4x+3y-18=0$，那么圆心的坐标满足这个方程，即$4a+3b-18=0$。我们来求两条直线的交点：

$$\begin{cases} 7a+3b-27=0 \\ 4a+3b-18=0 \end{cases} \Longleftrightarrow (a=3, \ b=2)；\ O_1(3, 2)。$$

进而求得$r=O_1A=\sqrt{(5-3)^2+(7-2)^2}=\sqrt{29}$。于是，所求的方程为：

$$(x-3)^2+(y-2)^2=29。$$

45．求下列圆的方程：

1）圆心在直线$x+4y+16=0$上，且通过点$A(-8,3)$

和$B(2, -7)$；

2）通过点$M(3, 2)$和$N(-1, -6)$，且圆心在与两坐标轴交于点$A(2, 0)$和$B(0, -4)$的直线上。

46．已知一个圆的圆心在点$O_1(-3, 1)$，并且它与直线$4x+3y-16=0$相切，求这个圆的方程。

解：由于切线的斜率$k_1=-\frac{4}{3}$，那么垂直于切线的直线O_1A的斜率$k_2=\frac{3}{4}$（图71）。因此，直线O_1A的方程为

$$y-1=\frac{3}{4}(x+3)，或3x-4y+13=0。$$

我们来解方程组：

$$\begin{cases}4x+3y-16=0,\\3x-4y+13=0\end{cases}\Longleftrightarrow(x=1, y=4)；A(1,4)。$$

现在我们求得$r=O_1A=\sqrt{(-3-1)^2+(1-4)^2}=5$。于是，所求的方程为：

$$(x+3)^2+(y-1)^2=25。$$

47．已知某圆的圆心在点$(-1, -4)$，它和一条与两坐标轴交于点$A\left(\frac{9}{4}, 0\right)$和$B(0, 3)$的直线相切，求此圆的方程。

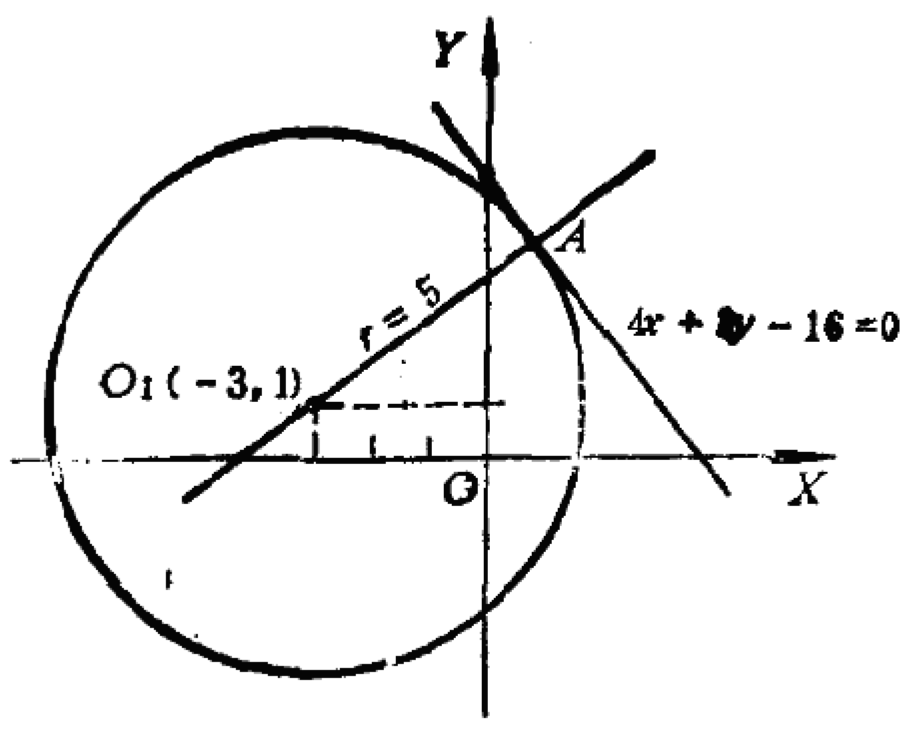


图 71

48．试建立通过坐标原点且与两坐标轴交于点$A(6, 0)$和$B(0, 4)$的圆的方程。

49．一个圆通过坐标原

点，并且在OX轴和OY轴上相应的截距为$a=-4$和$b=-3$。求这个圆的方程。

50．求圆$x^2+y^2-8x-10y-8=0$的圆心坐标和半径。

解：我们将已知方程改写成下面的形式：

$$x^2-8x+y^2-10y=8。$$

将二项式x^2-8x和y^2-10y配成完全平方的形式，得

$$x^2-2\cdot 4x+4^2+y^2-2\cdot 5y+5^2=8+4^2+5^2$$

或 $(x-4)^2+(y-5)^2=49$。

由此得$a=4$，$b=5$，$r=7$，即圆心为点(4，5)，而半径等于7。

51．求下列圆的圆心坐标和半径：

1）$x^2+y^2+6x-10y+13=0$；

2）$x^2+y^2+12y-13=0$；

3）$4x^2+4y^2-4x+20y-23=0$。

52．求下列圆的圆心坐标和半径：

1）$9x^2+9y^2+42x-54y-95=0$；

2）$x^2+y^2-4x-10y+29=0$；

3）$x^2+y^2+6x+14y+81=0$。

53．求圆心之间的距离：

1）$x^2+y^2-10x+16y+80=0$和

$x^2+y^2+6x+4y-12=0$；

2）$x^2+y^2+4x-12y+36=0$和

$x^2+y^2-8x+10y+5=0$。

54．求通过两圆心的直线的方程：

1）$x^2+y^2-8x-4y+11=0$和

$x^2+y^2+4x+12y+4=0$；

2）$x^2+y^2+4x-6y-23=0$和

$$x^2+y^2-10x-14y+58=0。$$

55. 圆$x^2+y^2+6x-4y-12=0$的一条直径与横坐标轴交成60°的角，求这条直径的方程。

56. 圆$x^2+y^2-2x+4y-4=0$的一条直径与OX轴的正方向交成135°的角，求这条直径的方程。

57. 已知圆的方程为$x^2+y^2-8x-2y+4=0$，求垂直于弦$x-5y-12=0$的直径的方程。

58. 已知圆的方程为$x^2+y^2+4x-6y=0$，求垂直于弦$2x-3y+13=0$的直径的方程。

59. 求圆的半径所在直线的方程：

1）过圆$x^2+y^2-6x+2y-19=0$上的点$A(5, -6)$所作的半径；

2）过圆$x^2+y^2-6x-9=0$上的点$A(6, 3)$所作的半径。

60. 求圆的切线的方程：

1）由圆$x^2+y^2-2x+2y-23=0$上的点A（4，－5）所作的切线；

2）由圆$x^2+y^2-10y+20=0$上的点A（－2，0）所作的切线。

61. 求两相交圆的公共弦的方程：

1）$x^2+y^2-6y=0$和$x^2+y^2-12x=0$；

2）$x^2+y^2+2x+2y-23=0$和

$$x^2+y^2-26x-2y+45=0。$$

62. 求下列圆的方程：

1）通过点$A(4, -7)$且与圆$x^2+y^2+4x-2y-11=0$是同心圆；

2）通过点A（5，6）且与圆$x^2+y^2-2x+6y+1=0$是同心圆。

§3. 椭　圆

平面上到两个定点（称为焦点）的距离之和等于定长($2a$)的点的集合称为椭圆，其中$2a$大于两焦点之间的距离$2c$。

当焦点在OX轴时，椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)\ , \tag{6.4}$$

这里，a为长半轴的长，b为短半轴的长（图72）。

参数a，b和c之间的关系为

$$a^2-b^2=c^2。 \tag{6.5}$$

焦距$2c$与长轴$2a$的比称为椭圆的离心率：

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1。 \tag{6.6}$$

如果椭圆的焦点在OY轴上（图73），那么椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\quad (a>b)。 \tag{6.7}$$

今后在有关椭圆的问题中，我们假定椭圆的对称轴都与坐标轴重合。

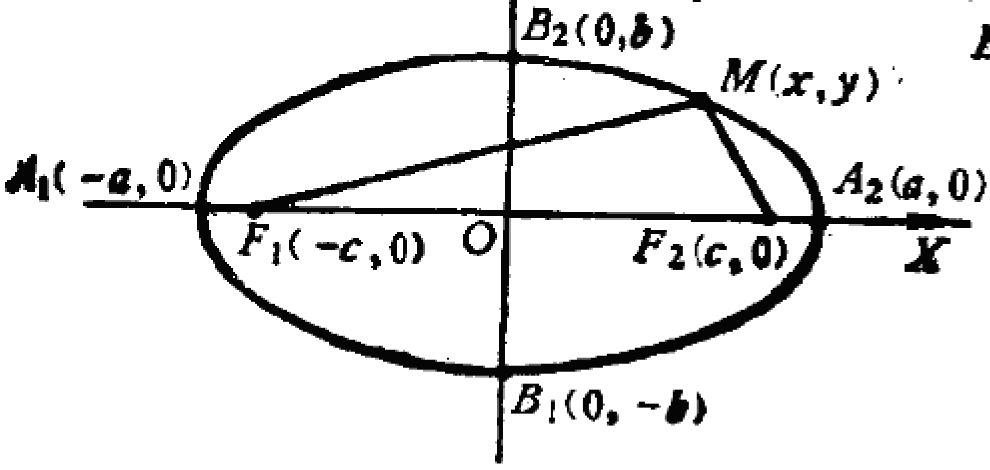


图 72

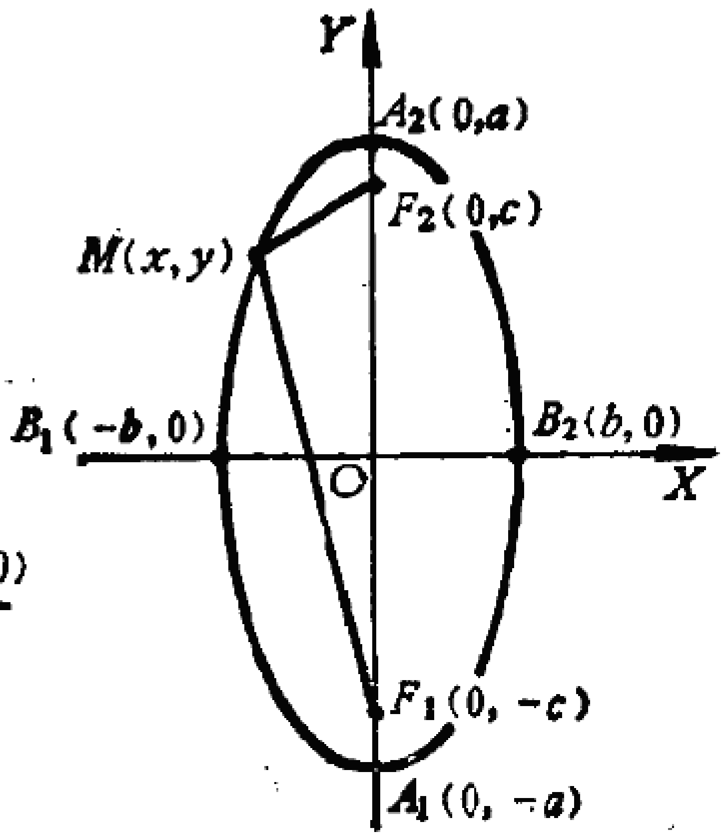


图 73

63．已知椭圆的长轴$2a=12$，短轴$2b=8$，焦点在OX轴上，求椭圆的方程。

解：为了建立椭圆的方程，必须知道参数a和b。按照题设条件，我们有 $a=6$和 $b=4$。将这些值代入椭圆方程(4.4)，得

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{4^2}=1，或\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1。$$

64．求椭圆的方程：

1）焦点在OX轴上，且$2a=8$，$2b=6$；

2）焦点在OY轴上，且$2a=10$，$2b=4$。

65．已知椭圆的两个顶点在点$A_1(-6,0)$和$A_2(6,0)$，而两个焦点在点$F_1(-4,0)$和$F_2(4,0)$，求这个椭圆的方程。

解：由已知条件，得$a=6$和$c=4$。由公式(6.5)求得$b^2=6^2-4^2=20$。将a^2和b^2的值代入公式(6.4)，得

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1。$$

66．求椭圆的方程：

1）两个顶点在点$(-5,0)$和$(5,0)$，而两个焦点在点$(-3,0)$和$(3,0)$；

2）两个顶点在点$(0,-8)$和$(0,8)$，而两个焦点在点$(-5,0)$和$(5,0)$。

67．如果椭圆的两个顶点在点$B_1(-8,0)$和$B_2(8,0)$，而两个焦点在点$F_1(0,-6)$和$F_2(0,6)$，求这个椭圆的方程。

解：由题设条件得出，焦点在OY轴上；那么$b=8$，$c=6$。根据公式(6.5)，我们有$a^2=8^2+6^2=100$。将a^2和b^2的

值代入方程（6.7），得

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1。$$

68．如果椭圆的两个顶点在点（0，-4）和（0，4），而两个焦点在点（0，-2）和（0，2），求这个椭圆的方程。

69．如果椭圆的两个焦点之间的距离等于6（焦点在OX轴上），长轴等于10，求这个椭圆的方程。

解：由题设条件得$a=5$，$c=3$。根据公式（6.5），求得$b^2=5^2-3^2=16$。将a^2和b^2的值代入公式（6.4），得

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1。$$

70．求椭圆的方程：

1）两个焦点之间的距离等于10（焦点在OX轴上）且长轴等于12；

2）两个焦点在点（-2，0）和（2，0），且短轴等于8。

71．求以点（0，$-\sqrt{5}$）和（0，$\sqrt{5}$）为焦点而长轴等于6的椭圆的方程。

解：焦点在OY轴上，那么$a=3$。根据公式（6.5），我们求得$b^2=3^2-(\sqrt{5})^2=4$。将a^2和b^2的值代入方程（4.7），得

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1。$$

72．求两个焦点在点（0，$-\sqrt{3}$）和（0，$\sqrt{3}$）且长轴等于$4\sqrt{7}$的椭圆的方程。

73. 已知椭圆的方程为$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$，求它的顶点坐标及长轴和短轴的长。

解：由椭圆的方程，我们有$a^2=49$，$a=\pm 7$；$b^2=16$，$b=\pm 4$。由此得椭圆的顶点坐标：A（± 7，0）和B(0，± 4)。于是，长轴等于$2a=2\times 7=14$，短轴等于$2b=2\times 4=8$。

74. 求椭圆的顶点坐标及长轴和短轴的长：

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$；　2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{81}=1$。

75. 已知椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$，求椭圆的两个焦点的坐标及它们之间的距离。

解：由椭圆方程，我们有$a^2=100$，$b^2=36$。根据公式(6.5)，我们求得$c=\pm\sqrt{100-36}=\pm 8$。这就是说，焦点的坐标为（-8，0）和（8，0），两个焦点间的距离为$2c=2\times 8=16$。

76. 求椭圆的两个焦点的坐标和焦点之间的距离：

1) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$；2) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{26}=1$。

77. 已知椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{51}=1$，求它的离心率。

解：由椭圆方程，我们有$a^2=100$，$b^2=51$。根据公式(6.5)，我们求得$c=\sqrt{100-51}=7$。根据公式(6.6)，求得离心率$e=\frac{7}{10}$。

78. 求椭圆的离心率：

1） $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$；　　2） $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$。

79．求焦点在点$(-4, 0)$和$(4, 0)$，而离心率$e=0.8$的椭圆的方程。

解：由题设条件我们有$c=4$，$e=\frac{c}{a}=0.8$。将c值代入这个等式得$a=5$。根据公式（6.5）求得$b^2=5^2-4^2=9$。于是，所求的方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1。$$

80．求焦点在$(-\sqrt{3}, 0)$和$(\sqrt{3}, 0)$，而离心率$e=\frac{1}{3}$的椭圆的方程。

81．如果两个焦点间的距离等于12，而离心率$e=0.6$，求焦点在OX轴上的椭圆的方程。

82．如果椭圆的长轴等于14，而离心率$e=\frac{2}{3}$，求焦点在OX轴上的椭圆的方程。

解：由题设条件我们有$a=7$，$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$。将$a$值代入这个关系式，得$c=\frac{14}{3}$。进而求得$b^2=7^2-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{245}{9}$。因此，所求的方程为

$$\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{\frac{245}{9}}=1，或\frac{x^2}{49}+\frac{9y^2}{245}=1。$$

83．求焦点在OX轴上的椭圆的方程：

1）长轴等于10，而离心率$e=0.6$；

2）短轴等于16，而离心率$e=0.6$。

84．求焦点在OX轴上的椭圆的方程：

1）长半轴与短半轴之和等于8，而两个焦点间的距离也等于8；

2）长半轴与短半轴之和等于25，而两个焦点的坐标为（－5，0）和（5，0）。

85．求焦点在OX轴上的椭圆的方程：

1）椭圆通过点（－6，4），而短轴等于10；

2）椭圆通过点（12，－12），而长轴等于40。

86．如果椭圆通过点$A(\sqrt{3},\sqrt{6})$和$B(3,\sqrt{2})$，求焦点在OX轴上的椭圆的方程。

解：为了建立椭圆的方程，必须求出参数a和b。将已知点的坐标代入椭圆方程（6.4），我们得到方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1,\\[2ex] \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1\end{cases} \Longleftrightarrow (a^2=12,\ b^2=8)。$$

于是，所求的方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$。

87．求焦点在OX轴上的椭圆的方程：

1）椭圆过点A（6，4）和B（8，3）；

2）椭圆过点$A(\sqrt{2},2)$和$B(2,\sqrt{3})$。

88．求椭圆$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$与直线$x+2y-14=0$的交点的坐标。

解：为了求椭圆与直线的交点坐标，需要解方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1, \\ x+2y-14=0\end{cases} \Longleftrightarrow (x=8,\ y=3)\text{或}(x=6,\ y=4)。$$

因此，椭圆与直线的交点坐标为（8，3）和（6，4）。

89．求曲线交点的坐标：

1）椭圆$\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1$和直线$x+3y-21=0$；

2）椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$和直线$3x+5y-21=0$。

90．求直线$x+4y-28=0$被椭圆$\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{25}=1$截得的线段的长。

91．求直线$x-2y-2=0$被椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$截得的线段的长。

§4．双　曲　线

平面上到两个已知点的距离之差的绝对值等于常数($2a$)的点的集合称为双曲线，这两个点称为焦点，$2a$小于这两个焦点间的距离（$2c$）。

焦点在OX轴上的双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{6.8}$$

这里a为实半轴的长，b为虚半轴的长（图74）。

参数a，b和c之间的关系为

$$b^2=c^2-a^2。 \tag{6.9}$$

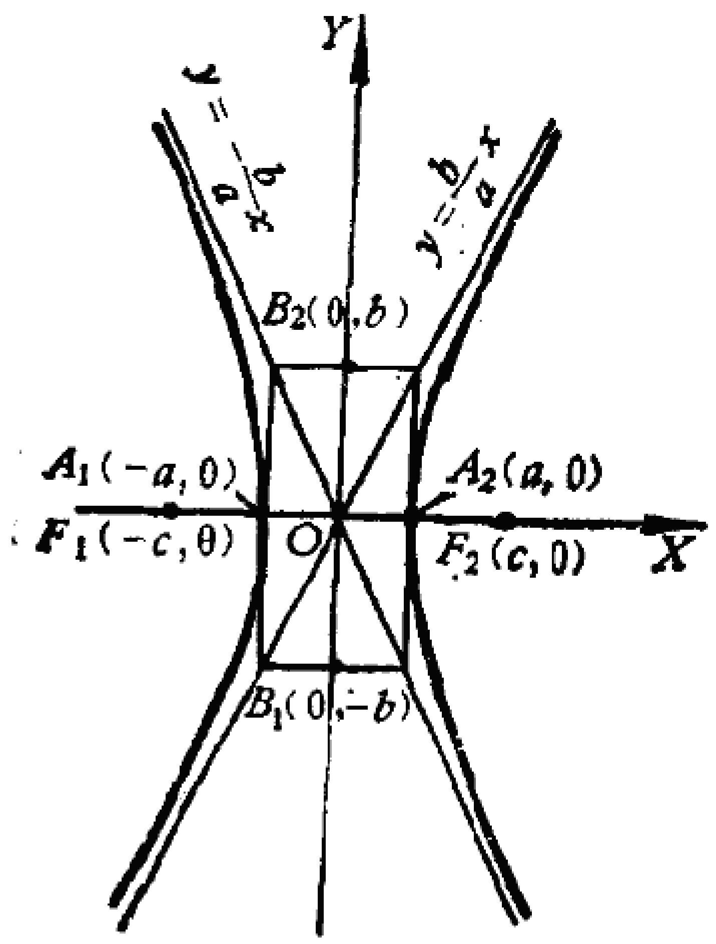


图 74

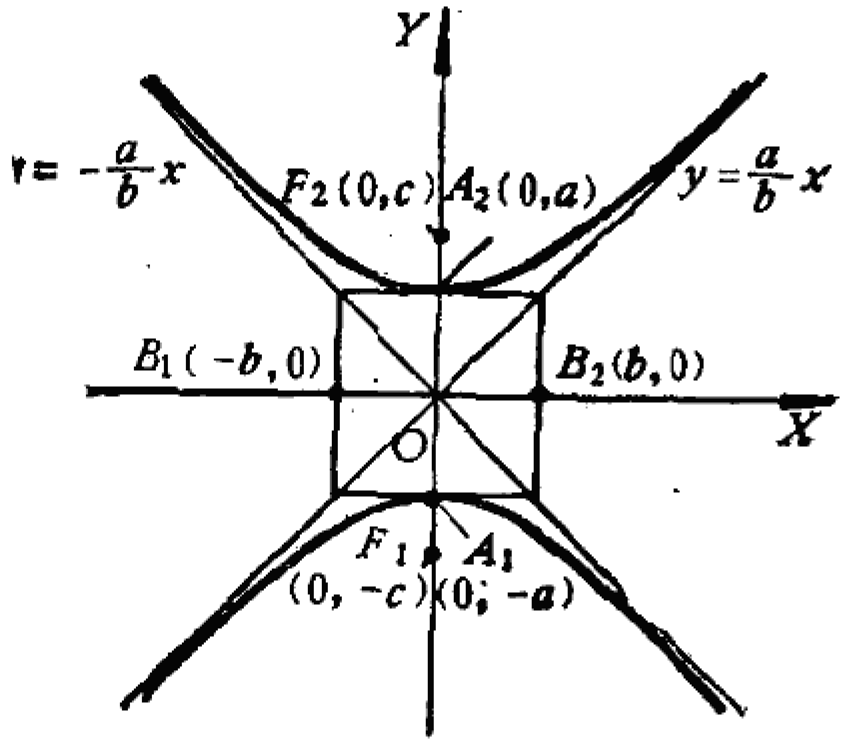


图 75

焦距与实轴的比，称为双曲线的离心率：

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1。\tag{6.10}$$

双曲线有两条渐近线，它们的方程为

$$y=\pm\frac{b}{a}x。\tag{6.11}$$

如果双曲线的实轴与虚轴相等（即$a=b$），那么这样的双曲线称为等轴双曲线。等轴双曲线的方程为

$$x^2-y^2=a^2,\tag{6.12}$$

而它的渐近线的方程为

$$y=\pm x。\tag{6.13}$$

如果双曲线的焦点在OY轴上（图75），那么它的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1，或\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1，\tag{6.14}$$

这样的双曲线的渐近线的方程为

$$y=\pm\frac{a}{b}x。 \qquad (6.15)$$

公式（6.9）和（6.10）对于焦点在OY轴上的双曲线也仍然成立。

双曲线（6.8）和（6.14）称为共轭双曲线。

焦点在OY轴上的等轴双曲线的方程为

$$y^2-x^2=a^2。 \qquad (6.16)$$

今后有关双曲线的问题都假定双曲线的对称轴与坐标轴重合。

92．如果某双曲线的焦点在OX轴上，它的实轴等于16，虚轴等于8，求这双曲线的方程。

解：为了求双曲线的方程，需要知道a和b。由题设条件我们有$2a=16$，$a=8$和$2b=8$，$b=4$。将a和b的值代入双曲线方程（6.8），得

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1。$$

93．已知某双曲线的焦点在OX轴上，它的实轴等于24，虚轴等于40，求此双曲线的方程。

94．已知双曲线的顶点在点A_1（-3，0）和A_2(3,0)，而焦点在点F_1（-5，0）和F_2（5，0），求这双曲线的方程。

解：由已知条件得$a=3$，$c=5$。根据公式（6.9）我们有$b^2=5^2-3^2=16$。将a^2和b^2的值代入方程（6.8），得

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1。$$

95．已知双曲线的两个顶点在（-3，0）和（3，0），

而焦点在$(-3\sqrt{5}, 0)$和$(3\sqrt{5}, 0)$，求这双曲线的方程。

96．如果双曲线的实轴长等于12，两个焦点间的距离等于20，求焦点在OX轴上的双曲线的方程。

97．已知双曲线的方程为$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{144}=1$，求它的顶点和焦点的坐标。

解：由双曲线的方程我们有$a^2=81$，$a=\pm 9$。根据公式（6.9）我们求得$c^2=81+144=225$，$c=\pm 15$。

因此，双曲线的顶点为$(-9, 0)$和$(9, 0)$，焦点在$(-15, 0)$和$(15, 0)$。

98．已知双曲线方程$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{14}=1$。求它的顶点和焦点的坐标。

99．求双曲线的实轴和虚轴长：

1）$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1$；　2）$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{81}=1$。

100．已知双曲线方程为$\frac{x^2}{14}-\frac{y^2}{22}=1$。求它的焦点坐标和焦点间的距离。

101．求双曲线焦点间的距离：

1）$\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$；　2）$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$。

102．已知双曲线的方程为$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$，求它的离心率。

解：由双曲线方程我们有$a^2=25$，$b^2=11$。根据公式

(6.10) 计算离心率：

$$e=\frac{\sqrt{25+11}}{5}=\frac{6}{5}。$$

103. 求双曲线的离心率：

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$；　2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$。

104. 已知双曲线的方程为$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{256}=1$，求它的渐近线的方程。

解：由双曲线方程我们求得$a=12$，$b=16$。将a和b的值代入等式（6.11），得：

$$y=\pm\frac{16}{12}，或y=\pm\frac{4}{3}x。$$

105. 求双曲线的渐近线方程：

1) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$；　2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$。

106. 求焦点坐标为（－20，0）和（20，0），而离心率$e=\frac{5}{3}$的双曲线方程。

解：由题设条件我们有：$c=20$，$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$将$c$值代入这个等式，得$\frac{20}{a}=\frac{5}{3}$，即$a=12$。进而根据公式（6.9）求得$b^2=20^2-12^2=256$。将$a^2$和$b^2$的值代入方程（6.8），得

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{256}=1。$$

107. 已知焦点坐标和离心率，求双曲线的方程：

1）（$\pm 2\sqrt{2}$，0），$e=2$；　2）（$\pm 3\sqrt{3}$，0），$e=\frac{\sqrt{6}}{2}$。

108．如果双曲线的实轴等于12，离心率等于$\frac{4}{3}$，求焦点在OX轴上的双曲线方程。

解：根据已知条件$2a=12$，那么$a=6$，利用等式(6.10)我们有$\frac{4}{3}=\frac{c}{6}$，即$c=8$。进而我们求得$b^2=8^2-6^2=28$。因此，所求的方程为

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1。$$

109．已知双曲线的实轴长等于14，离心率等于$\frac{9}{7}$，求焦点在OX轴上的双曲线方程。

110．求焦点在OX轴上的双曲线方程：

1）实轴长等于6，离心率等于$\frac{5}{3}$；

2）虚轴长等于8，离心率等于$\frac{3\sqrt{5}}{5}$。

111．如果实轴与虚轴之和等于14，两个焦点间的距离等于20，焦点在OX轴上，求这条双曲线的方程。

解：由已知条件$a+b=14$，$2c=20$，得$c=10$。根据公式（6.9）我们有$10^2=a^2+b^2$。于是得方程组

$$\begin{cases} a+b=14, \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \Longleftrightarrow (a=6,\ b=8)\text{或}(a=8,\ b=6)。$$

因此，满足题设条件的双曲线有两条：

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1 \text{ 和 } \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1。$$

112．求焦点在OX轴上的双曲线方程：

1）实轴与虚轴之和等于7，两个焦点间的距离等于10；

2）实轴与虚轴之差等于4，焦距等于40。

113．如果双曲线的实轴等于8，且双曲线通过点(8，6)，求焦点在OX轴上的双曲线方程。

解：由题设条件得$2a=8$，即$a=4$。将$a=4$和已知点的坐标代入方程（6.8），得$\frac{8^2}{4^2}-\frac{6^2}{b^2}=1$，由此$b^2=12$。再将$a^2$和$b^2$的值代入方程（6.8），我们得到所求的方程：

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{12}=1。$$

114．求焦点在OX轴上的双曲线方程：

1）实轴长等于16且双曲线通过点（－10，－3）；

2）虚轴长等于12且双曲线通过点（20，8）。

115．已知双曲线通过点（6，3）和（$5\sqrt{2}$，－4），焦点在OX轴上，求这条双曲线的方程。

解：为了建立双曲线的方程，需要求出a^2和b^2。将已知点的坐标代入方程（6.8），得方程组

$$\begin{cases}\frac{6^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1,\\ \frac{(5\sqrt{5})^2}{a^2}-\frac{(-4)^2}{b^2}=1\end{cases} \Longleftrightarrow (a^2=18,\ b^2=9)。$$

现在将a^2和b^2的值代入方程（6.8），得：

$$\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{9}=1。$$

116．求焦点在OX轴上的双曲线方程：

1）双曲线通过点（-6，$-\sqrt{7}$）和（$6\sqrt{2}$，4）；

2）双曲线通过点（-8，$2\sqrt{2}$）和（6，-1）。

117．已知双曲线的焦点坐标和渐近线方程为：

1）（±5，0），$y=\pm\frac{4}{3}x$；2）（±3，0），$y=\pm\sqrt{2}x$；

3）（±8，0），$y=\pm\sqrt{3}x$。求双曲线的方程。

118．如果双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$，而且双曲线通过点(6，-4)，求这条双曲线的方程。

解：由题设条件得$\frac{b}{a}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$。将已知点的坐标代入方程（6.8）并解方程组：

$$\begin{cases}\frac{6^2}{a^2}-\frac{(-4)^2}{b^2}=1,\\ \frac{b}{a}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}\Longleftrightarrow(a^2=12,\quad b^2=8)。$$

然后，将a^2和b^2的值代入方程（6.8），得：

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1。$$

119．已知双曲线的渐近线方程和双曲线通过的点的坐标为：1）$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，（9，$3\sqrt{2}$）；2）$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，（-4，-2）；3）$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$，（$4\sqrt{3}$，$3\sqrt{3}$）。求双曲线的方程。

120．已知双曲线通过的一点：1）$A(-5, 4)$；2）$B(8, 2)$。求焦点在OX轴上的等轴双曲线的方程。

121．求双曲线$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=-1$的顶点，焦点，离心率和渐近线。

解：已知的双曲线方程符合公式（6.14），即焦点在OY轴上。由方程得$a^2=64$，$a=\pm 8$；$b^2=36$，$b=\pm 6$。双曲线的顶点在点A_1（0，－8）和A_2（0，8）。

根据公式（6.9）我们有$c^2=64+36=100$，$c=\pm 10$。因此，焦点在点F_1（0，－10）和F_2（0，10）。

根据公式（6.10）计算离心率：$e=\frac{5}{4}$。

根据公式(6.15)求得双曲线的渐近线方程：$y=\pm\frac{4}{3}x$。

122．求双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的顶点，焦点，离心率和渐近线。

123．已知等轴双曲线通过点（$-\sqrt{3}$，$-\sqrt{5}$），而且焦点在OY轴上，求这条双曲线的方程。

§5. 顶点在坐标原点的抛物线

平面上到一个已知点和一条已知直线距离相等的点的集合称为抛物线。这个已知点称为焦点，已知直线称为准线。

顶点在坐标原点，对称轴为OX轴，开口方向朝右的抛物线（图76a）的方程为

$$y^2=2px, \tag{6.17}$$

这里$p>0$（抛物线参数）为由焦点到准线的距离。抛物线的

准线方程为$x=-\dfrac{p}{2}$。

顶点在坐标原点，对称轴为OX轴，开口方向朝左的抛物线（图76b）的方程为

$$y^2=-2px \quad (p>0) \text{。} \tag{6.18}$$

它的准线方程为$x=\dfrac{p}{2}$

顶点在坐标原点，对称轴为OY轴，开口方向朝上的抛物线（图77a）的方程为

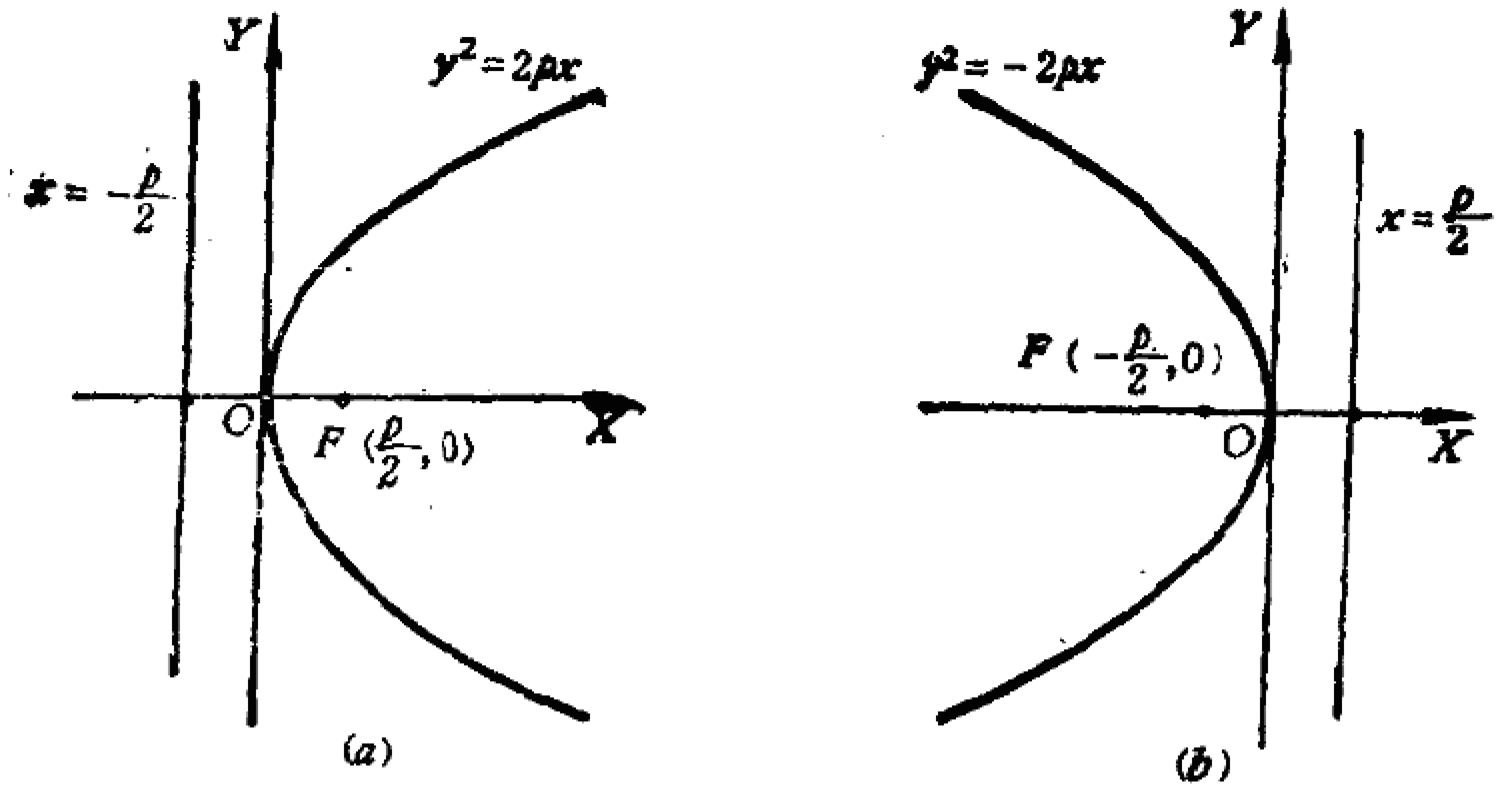


图 76

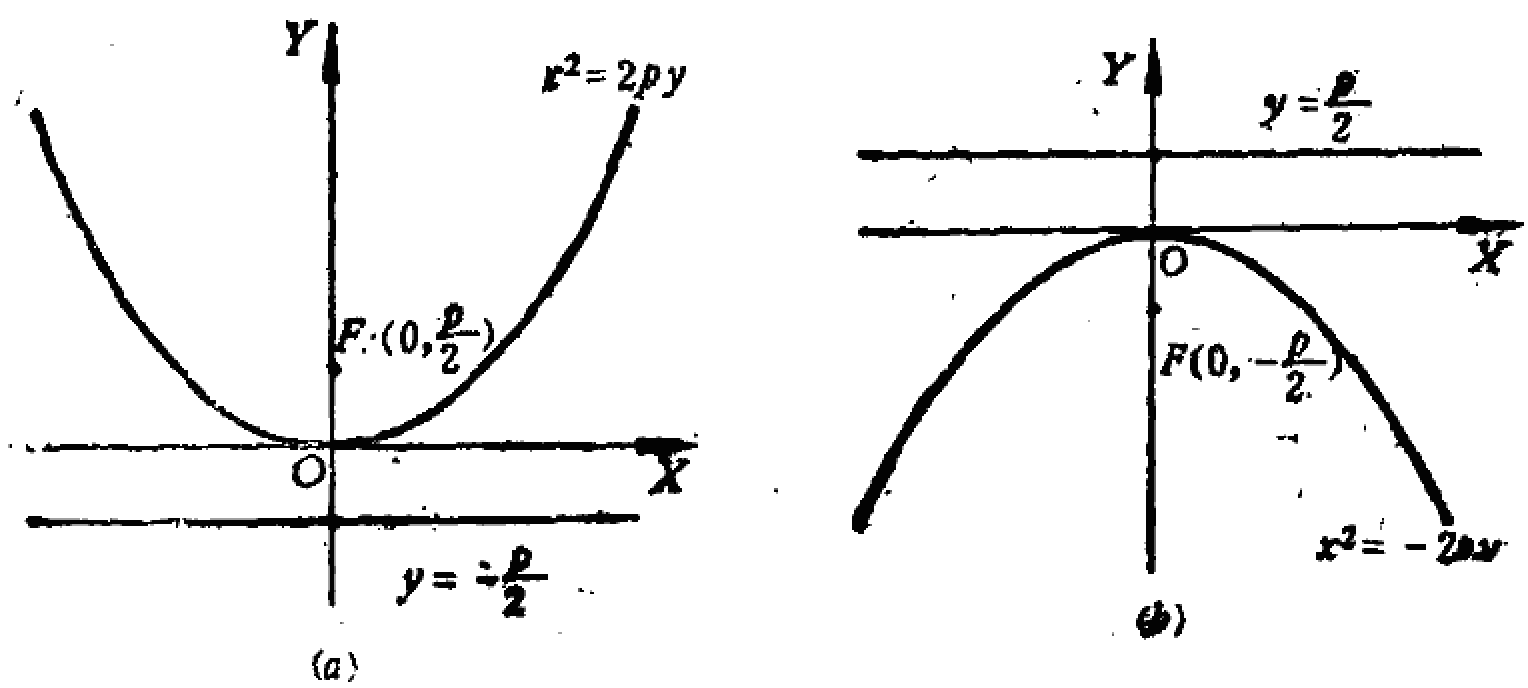


图 77

$$x^2 = 2py \quad (p>0) 。\tag{6.19}$$

它的准线方程为 $y = -\frac{p}{2}$。

顶点在坐标原点，对称轴为OY轴，开口方向朝下的抛物线（图77b）的方程为

$$x^2 = -2py \quad (p>0)。\tag{6.20}$$

它的准线方程为 $y = \frac{p}{2}$。

今后在有关抛物线的问题中，我们假定抛物线的对称轴是某一条坐标轴。

124．已知抛物线的焦点在$F(3, 0)$，求顶点在坐标原点的抛物线方程。

解：抛物线的焦点在正半轴OX上，因此抛物线方程具有(6.17)的形式，由于焦点的坐标为$\left(\frac{P}{2}, 0\right)$，那么$\frac{P}{2}=3$。由此得$P=6$。将$P$值代入方程（6.17），得

$$y^2 = 12x。$$

125．已知抛物线的顶点在坐标原点，而焦点在下列各点：1）$F(5, 0)$；2）$F(-4, 0)$；3）$F(0, 2)$；4）$F(0, -3)$。求抛物线的方程。

126．已知准线方程为$x=-4$，顶点在坐标原点，求这条抛物线的方程。

解：由坐标原点到准线的距离等于$\frac{p}{2}$，因而$\frac{p}{2}=4$，即$p=8$。由于准线的横坐标为负值，那么这个抛物线的方程具有（6.17）的形式。将p值代入方程(6.17)，得

$y^2=16x$。

127．如果抛物线的准线方程为：1）$x=-2$；2）$x=3$；3）$y=-4$；4）$y=1$。求顶点在坐标原点的抛物线方程。

128．求顶点在坐标原点，关于OY轴为对称，且通过点A（4，2）的抛物线方程。

解：由于所求的抛物线关于OY轴对称并且通过点A(4，2)，那么它的方程具有方程（6.19）的形式。将点A的坐标代入这个方程，求得$p=4$。再将p值代入方程(6.19)，得

$x^2=8y$。

129．已知抛物线通过下列各点：1）(5，3)；2）(－4，2)；3)(－2，－2)。求顶点为坐标原点且关于OX轴对称的抛物线的方程。

130．已知抛物线通过的一点：1）(2，－3)；2)(－3，1)。求顶点为坐标原点，且关于OY轴对称的抛物线的方程。

131．已知抛物线方程为$y^2=6x$。求它的准线方程。

解：由抛物线方程$y^2=6x$，得$2p=6$，即$p=3$。所以，准线的方程为$x=-\frac{x}{2}$，或$2x+3=0$。

132．求抛物线的准线方程：

1）$y^2=8x$；2)$y^2=-9x$；3)$x^2=4y$；4)$x^2=-10y$。

133．已知抛物线方程为$y^2=12x$，求它的焦点坐标。

解：由坐标原点到焦点的距离等于$\frac{p}{2}$。根据方程$y^2=12x$，得$2p=12$，由此$p=6$，$\frac{p}{2}=3$。于是得$F(3,0)$。

134．根据抛物线方程来计算焦点的坐标：

1) $y^2=6x$；2) $y^2=-4x$；3) $x^2=14y$；4) $x^2=-5y$。

135．如果抛物线的准线方程为$x=-3$，求顶点在坐标原点的抛物线焦点的坐标。

解：由坐标原点到准线的距离等于由坐标原点到焦点的距离，都等于$\frac{p}{2}$。由准线方程$x=-3$，得$\frac{p}{2}=3$。抛物线$y^2=2px$对应的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，因此焦点的坐标为$F(3,\ 0)$。

136．已知抛物线的准线方程为：1) $x=2$；2) $x=-5$；3) $y=4$；4) $y=-6$。求顶点在坐标原点的抛物线方程。

137．已知抛物线$y^2=12x$。求通过抛物线的交点并且垂直于坐标轴的弦长。

解：由于弦通过抛物线的焦点而且垂直于焦点所在的坐标轴，那么弦与抛物线的交点的横坐标等于焦点的横坐标（图78）。由抛物线方程，可求得焦点的坐标：$y^2=12x$，$2p=12$，$\frac{p}{2}=3$；$F(3,\ 0)$。

为了求弦与抛物线交点的纵坐标，我们将$x=3$代入抛物线方程：$y^2=12\times3=36$，由此$y_{1.2}=\pm6$。所以，弦与抛物线的交点的坐标为$M_1(3,\ 6)$和$(3,\ -6)$。弦M_1M_2的长等于$2\cdot FM_1=2\times6=12$。

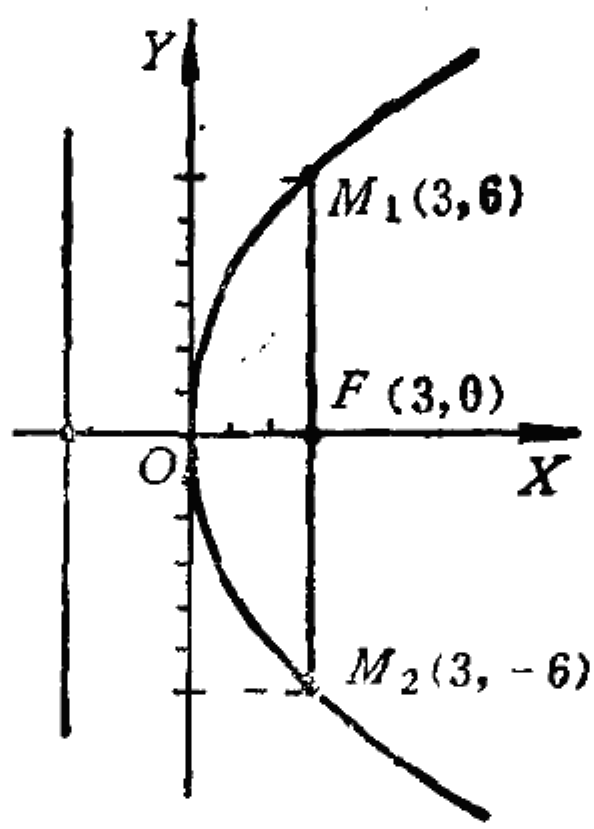


图 78

138 已知抛物线方程为$y^2=20x$。求过抛物线的焦点且垂直于焦点所在坐标轴的弦长。

139. 求抛物线$y^2=16x$与直线$4x-3y+8=0$的交点。

解：为了求抛物线和直线的交点的坐标，我们解方程组：

$$\begin{cases} y^2=16x, \\ 4x-3y+8=0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x=1,\ y=4)\text{或}(x=4,\ y=8)。$$

因此，抛物线与直线的交点坐标为(1, 4) 和 (4, 8)。

140. 求抛物线与直线的交点：

1) 抛物线$y^2=12x$与直线$2x-y+2=0$;

2) 抛物线$y^2=4x$与直线$2x-3y+4=0$。

141. 求两抛物线的交点：

1) $y=x^2$和$x=y^2$; 2) $y^2=9x$和$x^2=9y$。

§6. 顶点不在坐标原点的抛物线

顶点在点(a, b)，对称轴为平行于OX轴的直线，且开口方向朝右的抛物线（图79a）的方程为

$$(y-b)^2=2p(x-a)\ 。\qquad (6.21)$$

顶点在点(a, b)，对称轴为平行于OX轴的直线，且开口方向朝左的抛物线（图56b）的方程为

$$(y-b)^2=-2p(x-a)\ 。\qquad (6.22)$$

顶点在点(a, b)，对称轴为平行于OY轴的直线，且开口方向朝上的抛物线（图80a）的方程为

$$(x-a)^2=2p(y-b)\ 。\qquad (6.23)$$

顶点在点(a, b)，对称轴为平行于OY轴的直线，且开口方向朝下的抛物线（图80b）的方程为

$$(x-a)^2=-2p(y-b)。\qquad(6.24)$$

在每个抛物线方程中，抛物线参数$p>0$——p为由抛物线的焦点到准线的距离。

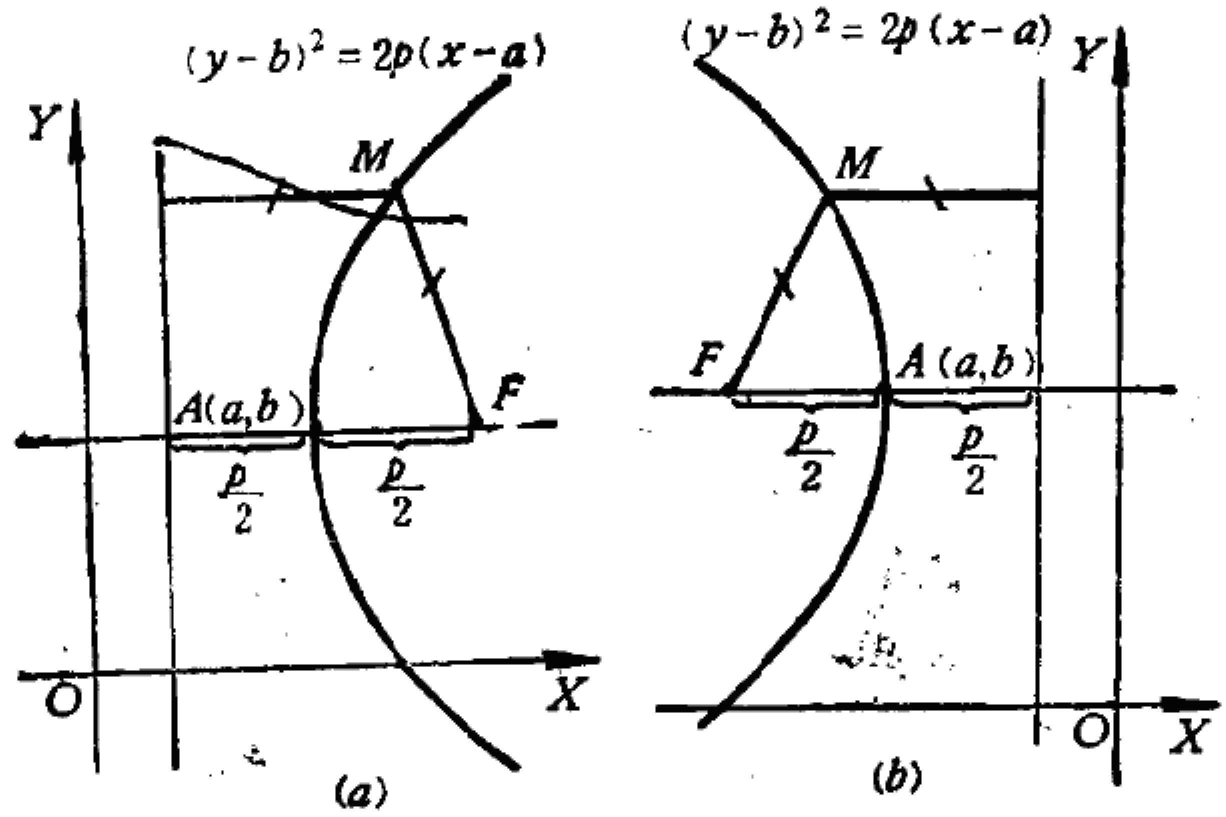


图 79

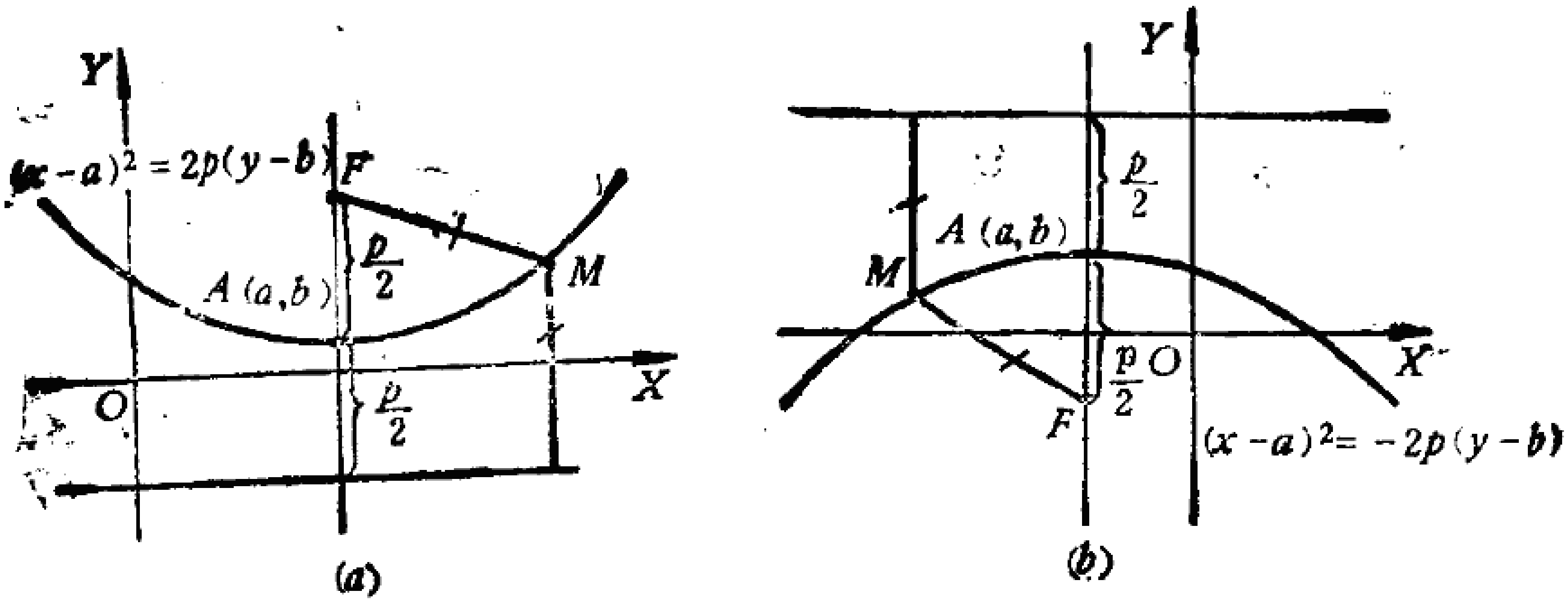


图 80

142. 已知抛物线的对称轴平行于OX轴，其顶点在$A(1,2)$且通过点$M(4,8)$，求抛物线的方程。

解：根据题设条件，所求的方程具有方程（4.21）的形式。由于点M（4，8）在顶点的右边，这就意味着抛物线的

开口方向朝右。为了计算p，我们将点A和点M的坐标代入方程（6.21）：$(8-2)^2=2p(4-1)$。由此得$p=6$。然后将$p=6$和顶点A的坐标代入方程（6.21），得所求的方程：

$$(y-2)^2=12(x-1)。$$

143．求对称轴平行于OX轴的抛物线的方程：

1）抛物线通过点$M(1,\ 3)$且顶点为$A(-4,\ -2)$；

2）抛物线通过坐标原点且顶点为$A(-2,\ -4)$；

3）抛物线通过点$M(-3,\ -3)$且顶点为$A(3,\ -1)$。

144．已知抛物线的对称轴平行于OY轴，求顶点为$A(-2,\ 1)$且通过点$M(5,\ -6)$的抛物线方程。

解：根据题设条件，所求的抛物线方程具有（6.24）的形式，由于点$M(5,\ -6)$在抛物线顶点的下面，这就意味着抛物线的开口方向朝下。为了计算p，我们将顶点A和点M的坐标代入方程（6.24）：$(5+2)^2=-2p(-6-1)$，由此得$p=\frac{7}{2}$。然后将求得的p值和顶点A的坐标代入方程（6.24），得所求的方程为：

$$(x+2)^2=-7(y-1)。$$

145．求对称轴平行于OY轴的抛物线方程：

1）抛物线通过点$M(-6,\ 8)$且顶点为$A(2,\ 4)$；

2）抛物线通过坐标原点且顶点为$A(5,\ -5)$；

3）抛物线通过坐标原点且顶点为$(3,\ 5)$。

146．如果抛物线的顶点在点$A(2,\ 3)$，而且焦点在点$F(6,\ 3)$，求抛物线的方程。

解：根据题设条件，由于抛物线的对称轴平行于OX轴（顶点和焦点的纵坐标相同，所以都在平行于OX轴的直线

上），那么所求的抛物线方程具有（6.21）的形式。而抛物线的开口方向朝右（焦点在顶点的右边）。由于抛物线的顶点和焦点之间的距离等于$\frac{p}{2}$，那么$\frac{p}{2}=6-2=4$，由此得$p=8$。我们将顶点A的坐标和求得p值代入方程(6.21)，得：

$$(y-3)^2=16(x-2)。$$

147．求顶点在点A，焦点在点F的抛物线方程：

1）$A(4,\ 6)$，$F(-2,\ 6)$；2）$A(3,\ -2)$，$F(3,0)$；

3）$A(-1,\ 1)$，$F(-1,\ -4)$。

148．求顶点在点$A(4,\ 6)$，而准线为直线$x=-2$的抛物线方程。

解：根据题设条件，因为抛物线的准线垂直于OX轴，所以抛物线的对称轴平行于OX轴，而抛物线的开口方向朝右(准线在顶点的左边)。因而所求的抛物线具有方程(6.21)的形式。因为由准线到顶点的距离等于$\frac{p}{2}$，那么$\frac{p}{2}$的值等于抛物线的准线横坐标与顶点横坐标的绝对值之和，即$\frac{p}{2}=|-2|+4=6$。由此得$p=12$。我们将点A的坐标和求得的p值代入方程（6.21），得：

$$(y-6)^2=24(x-4)。$$

149．求抛物线的方程：

1）顶点为（1，3），准线方程为$x=5$；

2）顶点为（-2，4），准线方程为$y=-2$；

3）顶点为（-3，5），准线方程为$y=7$。

150．求抛物线的方程：

1）关于OX轴为对称，顶点为（3，0），而准线为OY

轴；

2）关于OX轴为对称，顶点为（-4，0），而准线为直线$x=2$；

3）关于OY轴为对称，顶点为（0，2），而准线为OX轴；

4）对称轴为OY轴，顶点在（0，-2），而准线为直线$y=-5$；

5）对称轴为OY轴，顶点在（0，-3），而准线为OX轴。

151. 求抛物线的方程：

1）焦点在点（-6，-1），而准线方程为$x=2$；

2）焦点在坐标原点，而准线方程为$x=-4$；

3）焦点在（2，2），而准线方程为$y=-4$；

4）焦点为坐标原点，而准线方程为$y=4$。

152. 已知抛物线的方程$x^2-8x-4y+28=0$，求其顶点的坐标。

解：我们将这个方程化为方程（6.23）的形式。为此，我们进行下列变换：

$$x^2-8x=4y-28;\quad x^2-2\times 4x+4^2=4y-28+4^2;$$

$$(x-4)^2=4(y-3)。$$

由此得$a=4$，$b=3$，$2p=4$；A（4，3）。

153. 求抛物线的顶点坐标：

1）$x^2-6x-6y-21=0$；2）$x^2+8x+5y+21=0$。

154. 已知抛物线方程$y^2-6y-12x+33=0$，求它的顶点坐标。

解：我们将这个方程化为（6.21）的形式。为此，我们可类似地完成在152题中进行的变换：

$y^2-6y-12x+33=0$；$y^2-2\times3y+3^2=12x-33+3^2$；

$(y-3)^2=12(x-2)$。

由此得$a=2$，$b=3$，$2p=12$；$A(2,\ 3)$。

155．已知抛物线方程$y^2+6y+3x+15=0$，求它的顶点坐标。

156．求抛物线$y^2+4y-24x+76=0$的焦点坐标。

解：我们将抛物线方程变换为方程（6.21）的形式：

$y^2+4y=24x-76$；$y^2+2\times2x+2^2=24x-76+2^2$；

$(y+2)^2=24(x-3)$。

由此得$A(3,\ -2)$，$2p=24$，$p=12$。

由抛物线的顶点到焦点的距离等于$\frac{p}{2}=\frac{12}{2}=6$。焦点的横坐标等于$3+\frac{p}{2}=3+6=9$。因为抛物线的开口方向朝右，那么它的焦点在顶点的右边；由于抛物线的对称轴平行于OX轴，那么焦点的纵坐标等于顶点的纵坐标（图81）；因此，焦点为$F(9,\ -2)$。

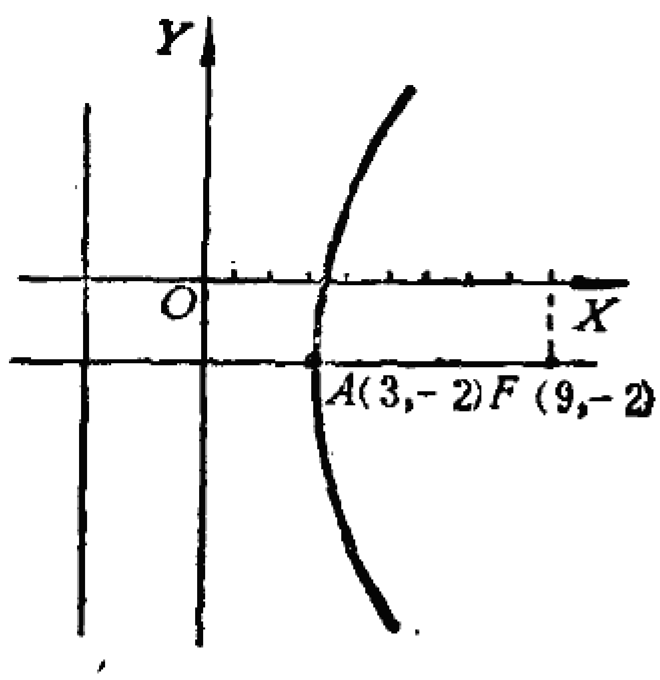


图 81

157．计算抛物线的焦点坐标：

1）$y^2-8y-8x-8=0$；2）$y^2-12x-36=0$。

158．计算抛物线的焦点坐标：

1）$x^2+10x+8y+41=0$；2）$x^2-6y-9=0$；

3）$x^2-4x-16y+68=0$。

159．已知抛物线$y^2-6y-8x-7=0$，求它的对称轴的方程。

解：已知抛物线的对称轴通过它的顶点且平行于 OX 轴。我们将抛物线的方程变形为方程（6.21）的形式，计算顶点坐标：

$$y^2-6y=8x+7;\ y^2-2\times3y+3^2=8x+7+3^2;$$

$$(y-3)^2=8(x+2)。$$

由此得$a=-2$，$b=3$；$A(-2,3)$。由于抛物线的对称轴通过顶点$A(-2,3)$，所以它的方程为：

$$y=3。$$

160．求抛物线的对称轴方程：

1）$y^2-10y-10x+5=0$；2）$x^2+16x-18y+100=0$。

161．已知抛物线 $y^2-4y-20x+24=0$，求它的准线方程。

解：抛物线的准线通过到它的顶点的距离为$\frac{p}{2}$的点，且垂直于对称轴。我们由抛物线的方程求p：

$$y^2-4y=20x-24;\ y^2-2\times2y+4=20x-24+4;$$

$$(y-2)^2=20(x-1)。$$

由此得 $a=1$，$b=2$；$A(1,2)$；$2p=20$，$\frac{p}{2}=5$。

抛物线的对称轴平行于OX 轴，而其开口方向朝右，所以准线在顶点的左边。因为由顶点到OY轴的距离等于1，而由顶点到准线的距离等于5，所以它同样在坐标原点的左边。准线的横坐标等于$\frac{p}{2}-1=5-1=4$；取负号时的值，所以准线方程为：

$$x=-4。$$

162．求抛物线的准线方程：

1) $y^2-2y-10x+11=0$; 2) $y^2+8y+8x+32=0$;

3) $x^2-6x+2y+7=0$。

163. 作抛物线$x^2-2x-y-8=0$。

解法 I：我们将方程$y=x^2-2x-8$变为方程(6.21)的形式，求顶点坐标：

$x^2-2x=y+8$; $x^2-2x+1=y+8+1$;

$$(x-1)^2=y+9。$$

由此得 $a=1$，$b=-9$；$A(1,-9)$。

我们来求抛物线与OX轴和OY轴的交点：$(-2,0)$，$(4,0)$和$(0,-8)$，从而得到抛物线的一些特殊点$(-2,0)$，$(0,-8)$，$(1,-9)$和$(4,0)$。按照这些点，我们可作出以$x=1$为对称轴的抛物线(图82)。

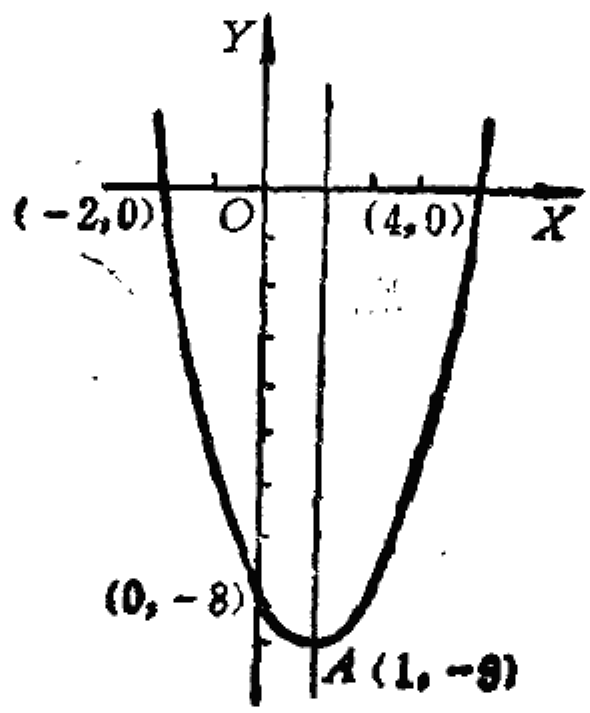


图 82

解法II：(利用抛物线与OX轴相交的条件)

设$y=0$，可得方程$x^2-2x-8=0$，它的根为$x_1=-2$和$x_2=4$。抛物线顶点的横坐标等于抛物线与OX轴两个交点的横坐标的算术平均值：

$x_{顶点}=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-2+4}{2}=1$。我们将顶点横坐标的值代入已知方程，可求得顶点的纵坐标：

$y_{顶点}=1^2-2\times1-8=-9$；$A(1,-9)$。

我们采用作法 I 的方法补齐其它点，作出抛物线。

164. 作抛物线：

1) $x^2+2x-y-8=0$； 2) $x^2+8x+4y=0$；

3) $y^2-4x+2y=0$； 4) $x^2-6x-6y-3=0$。

（在最末一题中，抛物线与OX轴交点的横坐标近似值精确到0.1）。

§7. 曲线的切线和法线

设在曲线$y=f(x)$上给定一点$M_0(x_0, y)$，那么$y_0=f(x_0)$（图83）。

当$x=x_0$时，导函数$y=f(x)$等于通过曲线$y=f(x)$上横坐标为点x_0的切线的斜率，即

$$k_{x=x_0}=y'_{x=x_0}=f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha,$$

这里α为曲线上过点$M_0(x_0, y_0)$的切线与OX轴的正方向之间的角。

曲线$y=f(x)$在点$M_0(x_0, y_0)$的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)。\tag{6.25}$$

过切点$M_0(x_0, y_0)$且垂直于切线的直线称为曲线$y=f(x)$在点$M_0(x_0, y_0)$的法线（图83）。

曲线$y=f(x)$在点$M_0(x_0, y_0)$的法线的方程为

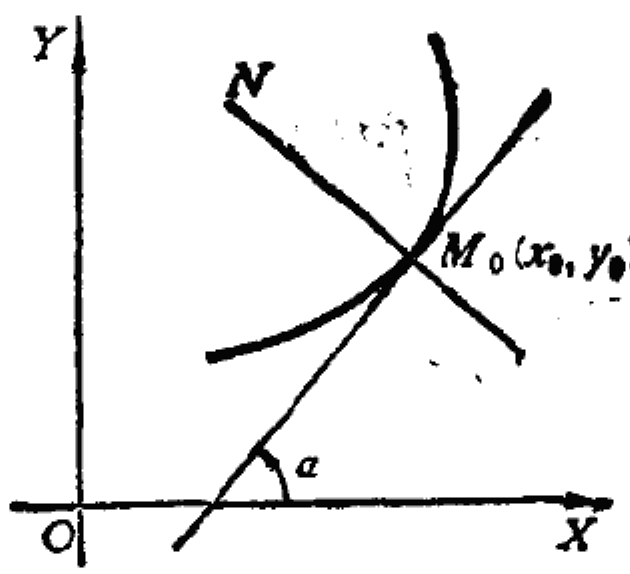


图 83

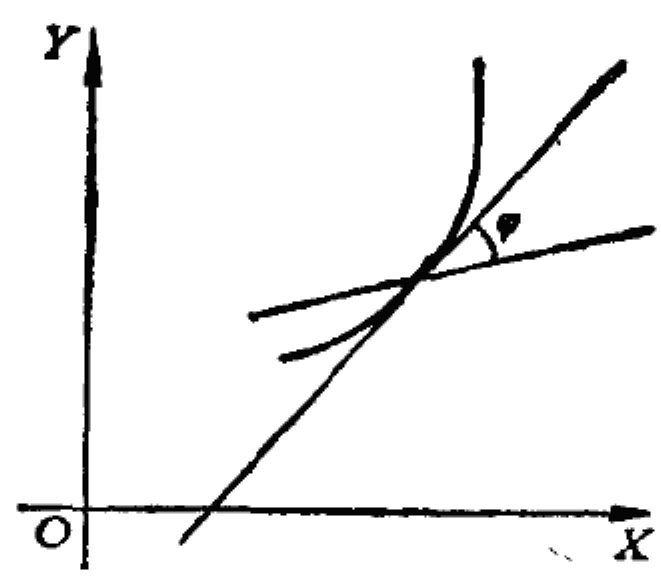


图 84

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\quad(x-x_0)\qquad(f'(x_0)\neq0)。(6.26)$$

曲线在每一点的方向可由在这点的切线方向来确定。所以为了求曲线在已知点的倾斜角，就应计算过这点的切线与OX轴之间的角（图84）。

由直线与曲线的交点所引的曲线的切线同直线之间的夹角称为直线与曲线之间的交角。

过两条相交曲线的交点所作的这两条曲线的切线之间的角称为这两条相交曲线之间的角（图85）。

165．求过抛物线$y=2x^2$上横坐标为1的点所作的切线的斜率。

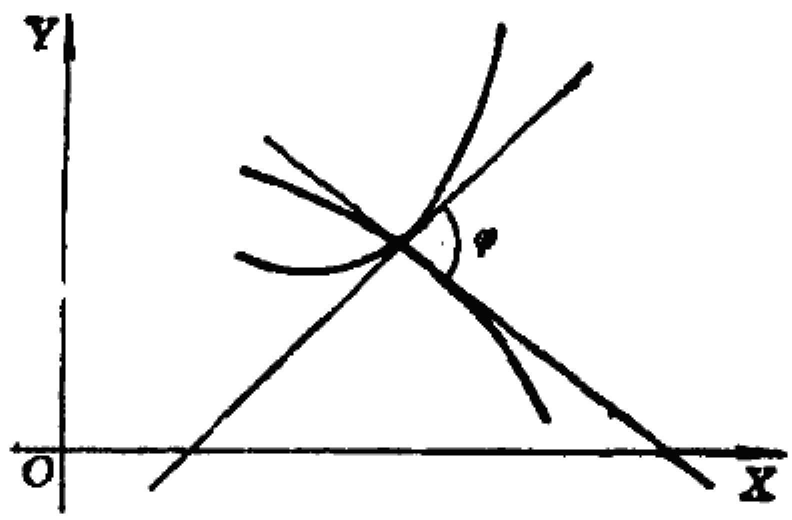


图 85

解：为了计算抛物线$y=2x^2$的切线斜率，我们可求函数$y=2x^2$的导数并计算它在$x=1$时的值：

$$y'=(2x^2)'=4x;\quad y'_{x=1}=4\times1=4;$$

$$k=\operatorname{tg}\alpha=y'_{x=1}=4。$$

166．求过抛物线$y=-x^2+x$上的点$x=-2$的切线斜率。

167．求过抛物线$y=x^2-3x+2$上的点$x=3$的切线斜率。

168．求在点$x=1$时抛物线$y=x^2-x+1$对于OX轴的倾角。

解：为了计算曲线在已知点的倾角，我们要确定过这点的切线与OX轴交成的角。

求函数$y=x^2-x+1$在$x=-1$时的导数：

$$y' = 2x - 1;\ \ y'_{x=-1} = 2\cdot(-1) - 1 = -3。$$

最后计算切线对于OX轴的倾角：

$$k = \text{tg}\alpha = y'_{x=-1} = -3;\ \ \text{tg}\alpha = -3;$$

$$\alpha = 108°26'。$$

169．求抛物线$y = x^2 - 2x$在点$x = 2$对于OX轴的倾角。

170．求曲线$y = x^3$在点$x = -2$所作的切线对于OX轴的倾角。

171．求曲线$y = \sin x$在点$x = \frac{\pi}{3}$所作切线对于OX轴的倾角。

解：求函数$y = \sin x$在$x = \frac{\pi}{3}$时的导数：

$$y' = \cos x,\ \ y'_{x=\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}。$$

切线在点$x = \frac{\pi}{3}$的倾角的正切等于$\frac{1}{2}$，即$k = \text{tg}\alpha = \frac{1}{2}$。由此得

$$\alpha = \text{arctg}\frac{1}{2} \approx 26°34'\ （图86）。$$

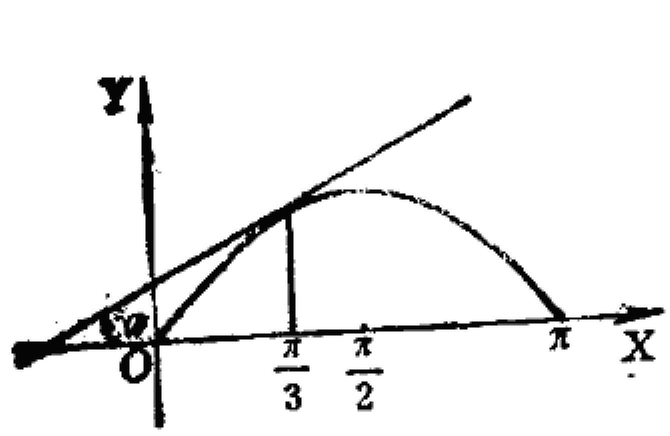


图 86

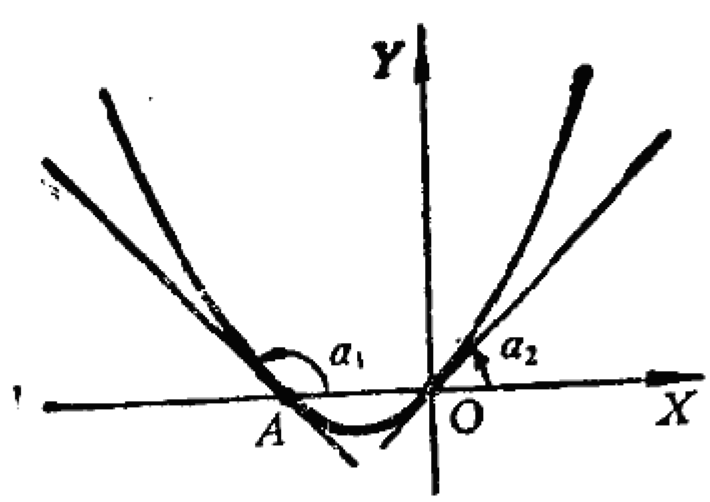


图 87

172．求曲线$y=\sin x$ 在点 $x=\frac{2\pi}{3}$所作切线对于OX轴的倾角。

173．如果切点为：1）$x=\frac{\pi}{3}$；2）$x=\frac{\pi}{4}$，求曲线$y=\mathrm{tg}x$的切线对于OX轴的倾角。

174．抛物线$y=x^2+x$与OX轴交成怎样的角？

解：我们先求抛物线$y=x^2+x$与OX轴的交点，为此，解方程组：

$$\begin{cases}y=x^2+x,\\ y=0\end{cases} \Longleftrightarrow (x=-1,\ y=0)\text{或}(x=0,\ y=0)。$$

这就意味着抛物线与OX轴相交于点$A(-1,0)$和$O(0,0)$（图87）。求出在这些点的切线斜率：

$$y'=(x^2+x)'=2x+1;\ k_{x=-1}=2\cdot(-1)+1=-1;$$
$$k_{x=0}=2\times0+1=1。$$

求抛物线在交点与OX轴组成的角α_1和α_2：

$\mathrm{tg}\alpha_1=-1$，$\alpha_1=135°$；$\mathrm{tg}\alpha_2=1$，$\alpha_2=45°$。

175．抛物线$y=x^2+2x-8$与OX轴交成怎样的角？

176．求曲线$y=\sin x$与OX轴相交于下列的点时所成的角：1）$x=0$；2）$x=\pi$。

177．求曲线$y=\ln x$在与OX轴的交点所成的倾角。

解：我们先求曲线$y=\ln x$与OX轴的交点。在这点，$\ln x=0$。由此得$x=1$（图88）。

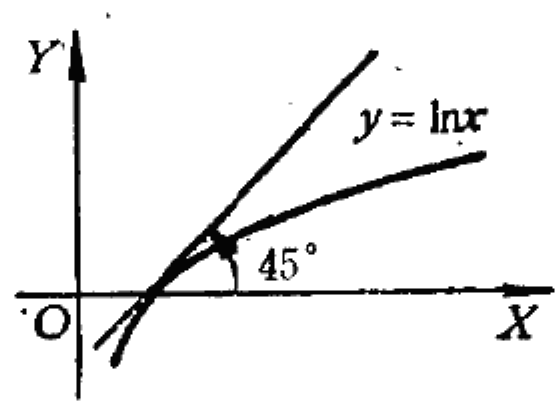


图 88

计算在点$x=1$的切线的斜率：

$$(\ln x)'_{x=1}=\left(\frac{1}{x}\right)_{x=1}=\frac{1}{1}=1。$$

我们来求切线在曲线$y=\ln x$与OX轴的交点构成的角：

$tg\alpha=1$，$\alpha=45°$。

178．如果：1）曲线$y=\lg x$与OX轴相交；2）曲线$y=e^{\sqrt{3}x}$与OY轴相交，那么它们的倾角怎样？

179．过抛物线$y=3x^2-x$上的点$x=-1$引切线和法线，求它们的方程。

解：为了建立切线的方程，我们求出点M的纵坐标和过点M所作的切线的斜率。

为了求曲线上点M的纵坐标，我们将$x=-1$的值代入抛物线方程：

$$y_{x=-1}=3\cdot(-1)^2-(-1)=4;\ M(-1,\ 4)。$$

然后我们计算切线和法线的斜率：

$$k_{切线}=y'_{x=-1}=(3x^2-x)'_{x=-1}=(6x-1)_{x=-1}$$
$$=6\cdot(-1)-1=-7;$$

$$k_{法线}=\frac{1}{7}。$$

我们将点M的坐标和$k_{切线}$与$k_{法线}$的值代入方程（6.25）和（6.26），得

$$y-4=-7(x+1)，或7x+y+3=0$$

（切线方程）和

$$y-4=\frac{1}{7}(x+1)，或x-7y+29=0$$

（法线方程）。

180．求抛物线$y=x^2-7x+10$在点$x=4$的切线和法线的方程。

181．求曲线$y=2x^3$在点$x=-1$的切线和法线的方程。

182．求椭圆$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{24}=1$在点（$-3$，$-4$）的切线和法线的方程。

解：将椭圆方程的两边对x进行微分，从而研究y为x的怎样函数：

$$\frac{2x}{27}+\frac{2yy'}{24}=0,\quad 8x+9yy'=0,$$

由此得$y'=-\frac{8x}{9y}$。

然后，我们求在点（-3，-4）的切线和法线的斜率：

$$k_{切线}=y'_{x=-3}=-\frac{8\cdot(-3)}{9\cdot(-4)}=-\frac{2}{3},$$

$$k_{法线}=\frac{3}{2}。$$

由此得

$$y+4=-\frac{2}{3}(x+3)，或2x+3y+18=0$$

（切线方程）和

$$y+4=\frac{3}{2}(x+3)，或3x-2y+1=0$$

（法线方程）。

183．求切线和法线的方程：

1）过圆$x^2+y^2=25$上的点（-3，4）；

2）过圆$x^2+y^2=169$上的点（12，-5）；

3）过椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$上的点（$-8$，$3$）；

4）过双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$上的点（$-5$，6）；

5）过抛物线$y^2=8x$上的点（2，-4）；

6）过抛物线$y^2=9x$上的点（1，3）；

7）过抛物线$y^2=6x$上的点$\left(\frac{3}{2}，3\right)$。

184．求切线和法线的方程：

1）过曲线$y=\sin 3x$上的点$\left(\frac{\pi}{3}，0\right)$；

2）过曲线$y=\sin\frac{x}{3}$上的点$\left(\pi，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；

3）过曲线$y=\cos 3x$上的点$\left(\frac{\pi}{6}，0\right)$。

185．已知抛物线$y=x^2-x-12$上一点的切线与OX轴交成45°角，求这点的坐标。

解： 过已知点的切线对于OX轴的倾角的正切为：

$$\mathrm{tg}\alpha=y'=(x^2-x-12)'=2x-1。$$

根据已知条件，角α等于45°，那么$\mathrm{tg}45°=2x-1$，或$1=2x-1$。由此得$x=1$。

于是，所求的点的纵坐标为：

$$y_{x=1}=(x^2-x-12)_{x=1}=1^2-1-12=-12；$$

因而所求的点的坐标为M（1，-12）。

186．已知抛物线$y=x^2+3x-10$上一点的切线与OX轴组成135°角，求切点的坐标。

187．已知曲线$y=\sin x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$上一点的切线

与OX轴组成的角为$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$，求这点的坐标。

188．在抛物线$y=x^2-2x-8$上求一点M，使过这点的切线平行于直线$4x+y+4=0$。

解：求抛物线切线的斜率：

$$k=y'=(x^2-2x-8)'=2x-2。$$

求已知直线的斜率：

$$4x+y+4=0;\quad y=-4x-4;\quad k=-4。$$

由于抛物线的切线与已知直线平行，那么它们的斜率相等：$2x-2=-4$。由此得切点的横坐标$x=-1$。

切点M的纵坐标可由抛物线方程求得：

$$y_{x=-1}=(-1)^2-2\cdot(-1)-8=-5;$$

$$M(-1,-5)\text{（图89）。}$$

189．在抛物线$y=-x^2+7x-10$上求一点，使过这点的切线平行于直线$x+y-1=0$。

190．过抛物线$y=-x^2+4$上怎样的点所作的切线垂直于直线$x-2y+2=0$？

191．计算抛物线$x^2-4y=0$与直线$x-2y+4=0$在交点

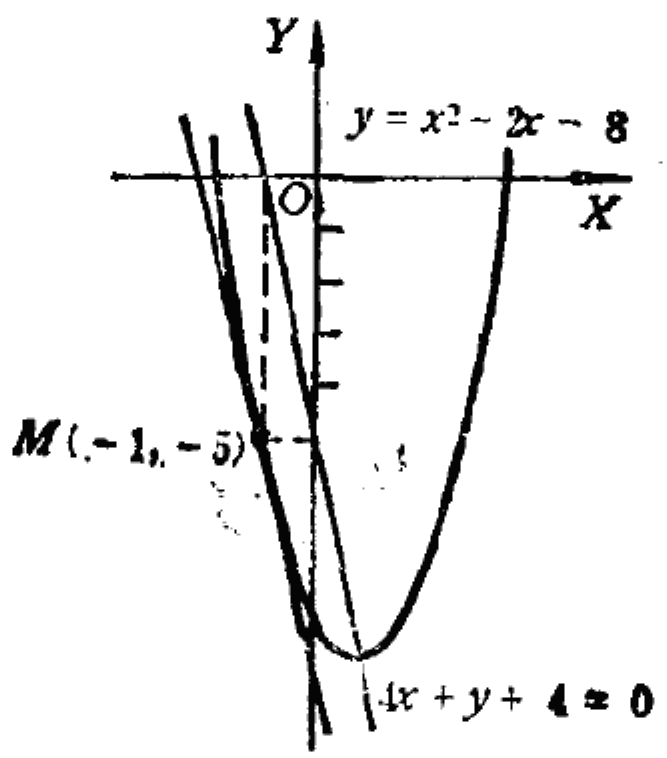


图 89

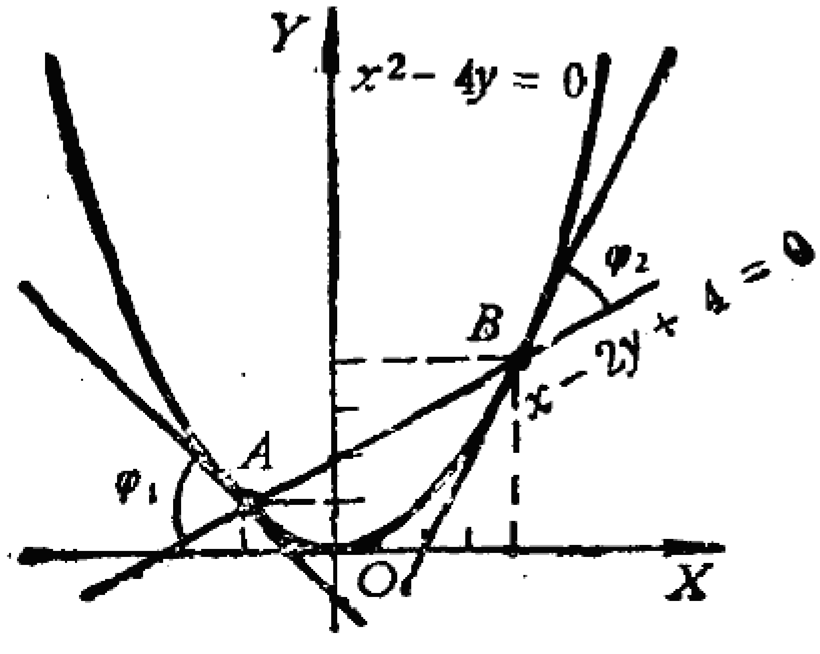


图 90

组成的锐角。

解：我们先求抛物线与直线的交点。为此，我们解方程组：

$$\begin{cases} x^2-4y=0, \\ x-2y+4=0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x=-2,\ y=1)\text{或}(x=4,\ y=4)。$$

因此，抛物线与直线的交点为 $A(-2, 1)$ 和 $B(4, 4)$（图90）。

我们来求已知直线的斜率：

$$x-2y+4=0;\ y=\frac{1}{2}x+2,\ k=\frac{1}{2}。$$

然后我们计算过点$A(-2,1)$和$B(4, 4)$的切线的斜率。将抛物线方程改写为$y=\frac{1}{4}x^2$，求得 $k=y'=\frac{1}{2}x$。

过点A的切线斜率为$k_{x=-2}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$；

过点B的切线斜率为$k_{x=4}=\frac{1}{2}\cdot 4=2$。

抛物线与直线在点A的交角，可按这样两条直线的夹角来求，其中一条直线的斜率为$k_1=-1$（切线在点A的斜率），另一条直线的斜率为$k_2=\frac{1}{2}$（直线的斜率）；

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1+\frac{1}{2}\cdot(-1)}=3;\ \varphi_1=71°34'。$$

可类似地求得抛物线与直线在点B交成的角：

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{4};\ \varphi_2=36°52'。$$

192. 计算抛物线$y^2-x=0$与直线$x+y-6=0$在交点组成的锐角。

193. 计算抛物线$y^2=4x$与$x^2=\frac{y}{2}$在交点组成的锐角。

解：我们先求两条抛物线的交点。为此，我们解方程组：

$$\begin{cases} y^2=4x, \\ x^2=\frac{y}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow (x=0,\ y=0)$$

或（$x=1$，$y=2$）。

因此，两条抛物线的交点为$O(0,\ 0)$和$A(1,\ 2)$（图91）。

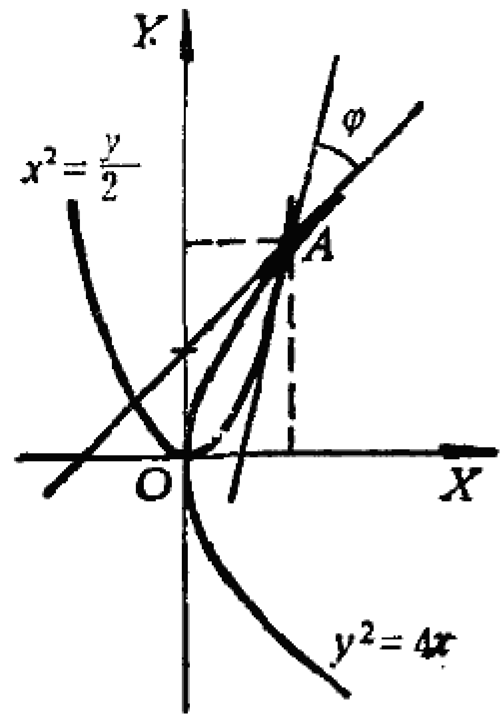


图 91

为了求两条相交抛物线之间的角，我们可求过它们的交点的两条切线之间的角。为此，我们来计算过抛物线交点的切线斜率。抛物线在点O（0，0）的切线为OX轴和OY轴，因此抛物线在这个点相交成直角，为了求抛物线$y^2=4x$在点A的切线斜率，我们将它的方程改写为$y=2\sqrt{x}$（由于抛物线在第Ⅰ象限相交，所以根号前取正号）：

$$k=y'=\frac{1}{\sqrt{x}};\quad k_{x=1}=y'_{x=1}=1.$$

我们再计算抛物线$x^2=\frac{y}{2}$在点A的切线斜率。为此，我们将它的方程改写为$y=2x^2$，从而有

$$k=y'=4x;\quad k_{x=1}=y'_{x=1}=4\times1=4.$$

最后我们根据$k_1=1$和$k_2=4$来计算两条切线之间的角：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\frac{4-1}{1+4\times 1}=\frac{3}{5}=0.6;$$

$\varphi=30°58'$。

194．计算两条抛物线交成的锐角：

1）$y=x^2$和$x=y^2$； 2）$y^2=4x$和$2x^2=27y$。

195．求曲线$y=\lg x$与直线$y=1$交成的锐角。

§8. 综 合 题

196．通过圆$x^2+y^2-12x-6y+29=0$和$x^2+y^2+4x+6y+4=0$的圆心所作的直线与OX轴相交。计算这条直线与OX轴的交角。

197．求过圆$x^2+y^2-4x-16y+32=0$的圆心和椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$的两个焦点的两条直线的交角。

198．计算由圆$x^2+y^2-6x-12y+36=0$的圆心对椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$的长轴和短轴的视角。

199．直线$3x-y+16=0$与圆$x^2+y^2+2x-6y-40=0$相交，而直线在圆内的线段为圆内接矩形的一条边。求这个矩形各边的方程。

200．求椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$与圆$x^2+y^2=5$的交点。

201．在圆$x^2+y^2=4$中作正三角形，使它的一个顶点的坐标为（0，2）。试计算三角形另外两个顶点的坐标。

202．求通过椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$和$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1$的焦

点的直线的方程。

203. 试计算椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$的内接正方形的面积。

204. 已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$的内接矩形的一组对边过焦点，试计算这个矩形的面积。

205. 求顶点在椭圆$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{8}=1$的焦点，而焦点为椭圆顶点的双曲线的方程。

206. 求双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{4y^2}{25}=1$的顶点到它的渐近线的距离。

207. 已知椭圆通过点（$5\sqrt{2}$，$4\sqrt{2}$），而它的焦点在等轴双曲线$x^2-y^2=18$的焦点，求椭圆的方程。

208. 已知两条抛物线以坐标原点为公共顶点，而它们的焦点在点F_1（3，0）和$F_2\left(0,\frac{3}{8}\right)$，求这条抛物线的交点。

209. 已知圆$x^2+y^2=20$和抛物线$x^2=8y$相交，求它们的公共弦的方程。

210. 由点O沿着与水平线成锐角的方向抛出一物体，它的运动轨迹为抛物线形状。物体的落地点到点O的距离为40米。如果物体达到的最大高度为25米，求抛物线轨迹的参数（不计空气阻力）。

小 测 验

第一组

1）求由圆$x^2+y^2-4x+2y-24=0$上的点$A(-3,1)$所引的半径的方程。

2）已知椭圆的焦点在OX轴上，两个焦点间的距离等于20，离心率等于$\frac{5}{6}$，求椭圆的方程。

3）已知曲线的方程为$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{63}=1$，求它的离心率。

4）已知抛物线的方程为$y^2-2y+16x+65=0$，求它的对称轴的方程。

5）已知抛物线的方程为$x^2+6x-12y-3=0$，求它的准线方程。

第二组

1）求过圆$x^2+y^2-2x+4y-13=0$上的点$A(-2,1)$所作的切线的方程。

2）已知椭圆的方程为$\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$，求它的离心率。

3）已知双曲线的焦点在OX轴上，焦点间的距离$2c=90$，渐近线为$y=\pm\frac{4}{3}x$。求这条双曲线的方程。

4）已知抛物线的方程为$x^2+6x+20y-51=0$，求它的对称轴的方程。

5）已知抛物线的方程为$y^2+8y+28x+72=0$，求它的准线方程。

第三篇　立体几何

第七章　空　间　向　量

§1. 基本概念、空间直角坐标系

1. 空间向量

和空间里的同一条射线同向的所有射线的集合称为空间的方向。

将空间的点M映射为点M_1，使射线$[MM_1)$与射线$[AB)$同向且距离$|MM_1|$与距离$|AB|$相等。这样的空间变换称为由不重合的点组(A,B)所确定的向量（平移）。

空间向量有下列性质：

1）向量可以滑动；

2）向量将射线映射成与它同向的射线，将直线映射成

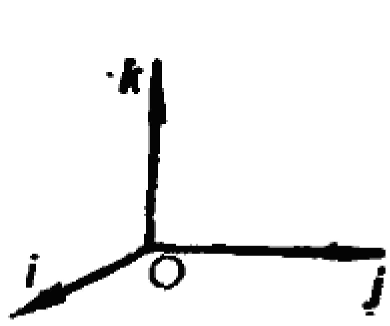


图　92

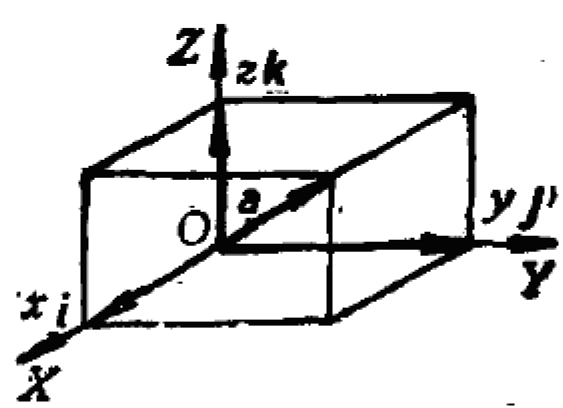


图　93

与它平行的直线，将平面映射成与它平行的平面。

三个非零向量的方向分处于平行于同一平面的三条直线上，称这三个非零向量为共面向量。

在三个向量中仅有一个零向量时，也认为这三个向量是共面的。

空间里的任一向量$\boldsymbol{d}$可以按三个不共面的向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$进行分解：

$$\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}。\tag{7.1}$$

2. 空间直角坐标系

假设在空间里给出三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$，它们具有同一原点O（图92）。这样的三个向量称为空间的正交基础向量。原点O和正交基础向量的总体称为空间直角坐标系。

向量$\boldsymbol{a}$在基础向量（$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$）上可分解为：

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}。\tag{7.2}$$

x，y，z称为点M在已知直角坐标系中的坐标，也叫向量$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$的坐标。

如果$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=(x, y, z)$，则可写为$M(x, y, z)$，其中$x$称为横坐标，$y$称为纵坐标，$z$称为点$M$或向量$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$的$z$坐标。向量的原点$O$称为坐标原点。向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$所确定的轴称为坐标轴，而通过两条坐标轴的平面称为坐标平面。给出了坐标系的空间称为坐标空间。

坐标平面将空间中不属于它的点分成八个部分，称为八个卦限。

坐标平面上的点有一个坐标等于零，坐标轴上的点有两个坐标等于零，坐标原点的三个坐标都等于零。

空间里每个卦限的点的坐标符号如下表：

坐　　标	卦				限			
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
横 坐 标	+	−	−	+	+	−	−	+
纵 坐 标	+	+	−	−	+	+	−	−
z 坐 标	+	+	+	+	−	−	−	−

如果向量$\boldsymbol{a}$的所有坐标都不为零，那么这个向量可以用棱长分别等于$|x|$，$|y|$，$|z|$的直六面体的对角线来表示（图93）。

正交基础向量（$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$）中，每个三数组（x，y，z）都确定唯一的一个向量，这三个数就是向量的坐标。

根据正交基础向量的定义，我们有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$

$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1。$$

如果向量$\boldsymbol{a}$的起点是A（x_A，y_A，z_A），终点是B（x_B，y_B，z_B），那么向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$的坐标等于点$A$和点$B$的相应的坐标之差：

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A) \quad (7.3)$$

或者写作

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\boldsymbol{i}+(y_B-y_A)\boldsymbol{j}+(z_B-z_A)\boldsymbol{k}。\quad (7.4)$$

3. **向量坐标的运算法则**

如果在基础向量（$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$）中给出向量$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$和$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，那么：

两个（或多个）向量和的坐标等于各个加数相应坐标的

和，即

$$a+b=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2);$$

两个向量差的坐标等于这两个向量相应坐标的差，即

$$a-b=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2);$$

数与向量的乘积的坐标等于已知向量相应的坐标乘以这个数：

$$ma=(mx_1,\ my_1,\ mz_1)。$$

4. 两个向量共线的条件

两个向量$a=(x_1,\ y_1,\ z_1)$和$b=(x_2,\ y_2,\ z_2)$共线的条件为

$$x_1=mx_2,\ y_1=my_2,\ z_1=mz_2。\qquad(7.5)$$

如果$m>0$，那么向量a和b同向；如果$m<0$，那么向量a和b反向。

5. 向量的长

向量a的长（两点间的距离）可按下列公式计算：

$$a=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}。\qquad(7.6)$$

向量a的向量半径的长可按下面的公式计算：

$$|a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}。\qquad(7.7)$$

6. 线段的定比分点

如果点C分线段AB为$|AC|:|CB|=\lambda$，那么点C的坐标可按下列公式计算：

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},$$

$$z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}。\qquad(7.8)$$

如果$\lambda=1$，那么可得计算线段中点坐标的公式：

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{2},\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2},$$

$$z_C=\frac{z_A+z_B}{2}。\tag{7.9}$$

7. 向量的方向余弦

由向量$\boldsymbol{a}$的半径与坐标轴OX，OY，OZ组成的角可按下列公式计算：

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。\tag{7.10}$$

根据这些公式计算的角的余弦称为向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦。

向量的方向余弦间有下式的关系：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1。\tag{7.11}$$

1. 已知平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$。指出在射线AB，AD，AA_1，BC，BB_1，C_1D_1，C_1C，A_1D_1中：1）哪些同向；2）哪些反向。

2. 已知四面体$ABCD$，指出在射线AB，AC，AD，CD中：1）哪些同向；2）哪些反向。

3. 已知平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，由下列已知点作出向量：1）由点A作向量$\overrightarrow{CD}$；2）由点B_1作向量$\overrightarrow{AB}$；3）由点C作向量AA_1。

4． 已知四面体$ABCD$，由下列点作向量：1）由点C作向量$\overrightarrow{AB}$；2）由点D作向量$\overrightarrow{AC}$；3）由点B作向量$\overrightarrow{DA}$。

5． 由下列图形的顶点组成的所有可能的有序点对给出了多少个向量：1）平行六面体；2）四面体；3）三棱锥。

6． 在平移$\overrightarrow{AB}$的情况下作四面体$ABCD$。

7． 在平移$\overrightarrow{AC}$的情况下作平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$。

8． 已知四面体$ABCD$，求下列向量的和：

1）$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$；2）$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$；3）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$。

9．已知平行六面体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，求下列向量的和：

1）$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}$；2）$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}$；

3）$\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{D_1A}+\overrightarrow{BD_1}+\overrightarrow{D_1D}$；4）$\overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{C_1C}$。

10．已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，求下列向量的和：

1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C}$；2）$\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{BA_1}$；

3）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{B_1A_1}$。

11．若M为线段AB的中点，O为空间任意一点，求证：

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}。$$

12．已知四面体$ABCD$，试由点B作与下列向量反向的向量：1）$\overrightarrow{AD}$；2）$\overrightarrow{CD}$；3）$\overrightarrow{AB}$；4）$\overrightarrow{AC}$。

13．在空间中的平面ABC外取一点O，试由点O作下列向量：1）$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$；2）$-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$；3）$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。

14. 已知四面体$ABCD$，证明：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$。

15. 已知平行四边形$ABCD$和它的外面任意一点O，证明：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$。

16. 若M为三角形ABC的中线交点，O为空间里的任意一点，证明：$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$。

解：设CC_1是三角形ABC的一条中线（图94）。根据三角形中线的性质，我们有$\overrightarrow{MC_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}$，同时有$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}$，即$\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OC}$。

由于$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{OC_1}$，那么

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{OC_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}$$

$$=\overrightarrow{OC_1}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}。$$

但是$\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$（参看问题11），因此

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})。$$

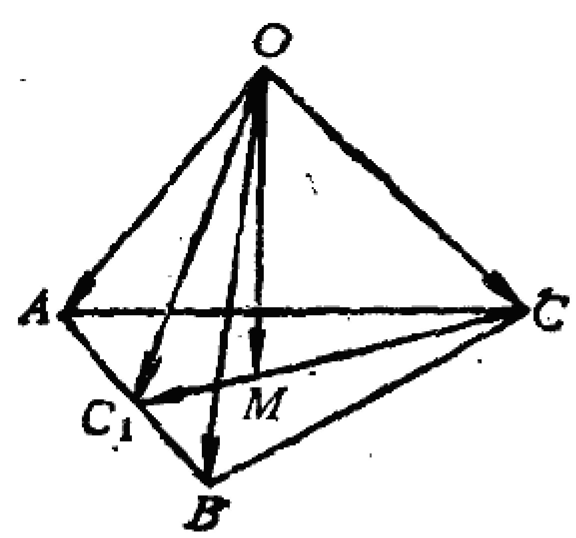


图 94

17. 已知平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，试指出下列的

哪三个向量是共面向量：1） $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DD_1}$，2） $\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{B_1B}$，$\overrightarrow{CC_1}$；3） $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CC_1}$；4） $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$；5） $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{A_1D_1}$，$\overrightarrow{CC_1}$；6） $\overrightarrow{B_1B}$，$\overrightarrow{DD_1}$，$\overrightarrow{AA_1}$；7） $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{A_1B_1}$。

18．指出四面体$ABCD$的顶点的三个有序点组中，哪些确定出共线向量，哪些是共面向量和不共面向量。

19．已知平行六面体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，试按照向量$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{q}=\overrightarrow{AD}$和$\boldsymbol{\gamma}=\overrightarrow{AA_1}$分解下列向量：1）$\overrightarrow{AD_1}$；2）$\overrightarrow{AC_1}$；3）$\overrightarrow{AM}$，这里$M$为$[BB_1]$的中点，4）$\overrightarrow{AN}$，这里$N$为$[B_1C_1]$的中点；5） $\overrightarrow{AP}$，这里P为B_1C_1上的一点且$|D_1P|:|PC|=3:4$。

20．已知四面体$ABCD$，侧面三角形ABC的中线相交于点M。试将向量$\overrightarrow{DA}$按照$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DM}$进行分解。

21．已知平行四边形$ABCD$和它之外的一点M。按照向量$\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{c}$分解下列向量：1）$\overrightarrow{MO}$，这里$O=(AC)\cap(BD)$；2）$\overrightarrow{MD}$；3）$\overrightarrow{MN}$，这里$N$为$AD$的中点。

22．作下列各点：$A(2,3,4)$；$B(-2,-3,-4)$；$C(-2,-3,4)$；$D(2,-3,4)$；$E(-2,3,4)$；$F(2,3,-4)$；$G(0,0,2)$；$H(3,0,-4)$；$K(5,0,0)$；$L(-2,-3,0)$；$M(0,4,5)$。

23．指出下列向量的坐标：1） $3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$；2） $2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$；3） $0.5\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}$；4） $3\boldsymbol{k}$；5） $-4\boldsymbol{i}$；6） $\overrightarrow{O}$。

24．已知向量：1） $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$；2） $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$。写出它们的坐标。

25．作出下列向量：1） $\boldsymbol{a}=(2,3,4)$；2） $\boldsymbol{b}=$

(2，－3，－4)；3) $\boldsymbol{c}=(3,-1,-4)$，4) $=\boldsymbol{p}$ (－5，－4，3)。

26. 如果 A，B 的坐标为：1) $A(2,-3,4)$ 和 $B(-3,2,-5)$；2) $A(0,-2,3)$ 和 $B(5,0,-4)$。作出向量 $\overrightarrow{AB}$。

27. 已知下列各点的坐标为：$A(4,-3,2)$ 和 $B(-2,4,-3)$，$M(0,5,1)$ 和 $N(-4,0,-3)$。求向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 的坐标。

28. 已知向量坐标 $\boldsymbol{a}=(2,3,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2,1)$ 和 $\boldsymbol{c}=(3,0,2)$，求下列向量的坐标：1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$；3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$；4) $3\boldsymbol{a}$；5) $-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}$；6) $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$。

29. 利用两个向量共线的条件，检验下列向量是否共线：1) $\boldsymbol{a}=(\frac{2}{5},-\frac{1}{3},\frac{4}{5})$ 和 $\boldsymbol{b}=(\frac{3}{5},-\frac{1}{2},\frac{6}{5})$；2) $\boldsymbol{c}=(-6,\frac{1}{3},3)$ 和 $\boldsymbol{d}=(-2,\frac{1}{9},-\frac{1}{3})$。

30. 当 n 和 p 为何值时，向量 $\boldsymbol{a}=(-3,n,4)$ 和 $\boldsymbol{b}=(-2,4,p)$ 共线？

31. 计算向量的长：

1) $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$；　2) $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$；

3) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$；　4) $\boldsymbol{d}=-3\boldsymbol{k}$。

32. 已知：1) $\boldsymbol{a}=(-1,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,2,-1)$；2) $\boldsymbol{a}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2,-3)$。计算向量 $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$ 的长。

33. 如果 $\boldsymbol{a}=(2,0,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,-1)$，计

算向量$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$的长。

34.如果有$A(5,3,1)$和$B(4,5,-1)$，计算向量$\overrightarrow{AB}$的长。

35. 如果有$A(8,0,6)$，$B(8,-4,6)$，$C(6,-2,5)$，求由向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{CA}$组成的三角形的周长。

36.已知$A(7,2,-3)$，$B(-5,0,4)$，且线段AB被点C分成的比为$\lambda=|AC|:|CB|=1:5$，求点C的坐标。

解：将$x_A=7$，$y_A=2$，$z_A=-3$，$x_B=-5$，$y_B=0$，$z_B=4$和$\lambda=\frac{1}{5}$的值代入关系式（7.8），得

$$x_C=\frac{7+\frac{1}{5}\cdot(-5)}{1+\frac{1}{5}}=5,\quad y_C=\frac{2+\frac{1}{5}\cdot 0}{1+\frac{1}{5}}=\frac{5}{3},$$

$$z_C=\frac{-3+\frac{1}{5}\cdot 4}{1+\frac{1}{5}}=-\frac{11}{6}。$$

于是，得$C\left(5,\frac{5}{3},-\frac{11}{6}\right)$。

37. 已知线段AB的端点坐标为$A(4,2,-3)$和$B(6,-4,-1)$。求将这条线段二等分的分点C的坐标。

38. 已知线段AB的端点坐标为$A(3,-2,-5)$和$B(7,6,-1)$，求将这条线段分成的比为$\lambda=|AC|:$

$|CB| = 1:3$的分点C的坐标。

39.求以$A(7, -4, 5)$，$B(-1, 8, -2)$和$C(-12, -1, 6)$为顶点的三角形的中线交点。

40. 求向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$与基础向量组成的角的余弦。

解：按照公式（7.6）求向量$\boldsymbol{a}$的长：

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3。$$

根据公式（4.10）求已知向量与基础向量组成的角的余弦：

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}，\cos\beta = -\frac{1}{3}，\cos\gamma = \frac{2}{3}。$$

41.求下列向量与基础向量组成的角的余弦：1）$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$；2）$\boldsymbol{b}=(4, 3, 0)$；3）$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$；4）$\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{i}$。

§2. 空间向量的数量积

给出了坐标的向量$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$和$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$的数量积可按下面的公式计算：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{7.12}$$

向量$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$和$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$之间的角可按下面的公式计算：

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \tag{7.13}$$

两个向量$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$和$\boldsymbol{b}(x_2, y_2, z_2)$垂直的条件为：

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0。\qquad (7.14)$$

42．求向量$\boldsymbol{a}=(4,-3,1)$和$\boldsymbol{b}=(5,-2,-3)$的数量积。

解：根据公式（7.12）求得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times5+(-3)\times(-2)+1\times(-3)=23。$$

43．求下列向量的数量积：

1）$\boldsymbol{a}=(3,-2,1)$和$\boldsymbol{b}=(4,-7,-3)$；

2）$\boldsymbol{c}=\left(\frac{2}{3},-\frac{5}{6},\frac{1}{4}\right)$和$\boldsymbol{d}=\left(\frac{3}{2},\frac{6}{5},\frac{4}{3}\right)$。

44．已知向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$。求前两个向量之和与第三个向量的数量积。

45．已知立方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$。求两个向量之间的角：1）$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{BB_1}$；2）$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{D_1C_1}$；3）$\overrightarrow{AD_1}$和$\overrightarrow{BA_1}$；4）$\overrightarrow{BD}$和$\overrightarrow{DC_1}$；5）$\overrightarrow{CB_1}$和$\overrightarrow{AA_1}$。

46．已知向量$\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求它们之间的夹角。

解：根据公式（7.13）得

$$\cos\varphi=\frac{-4(-2)+(-3)\cdot3+5\cdot1}{\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+5^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{7}}{35};$$

$$\varphi=\arccos\frac{2\sqrt{7}}{35}。$$

47. 求向量$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{k}$之间的角。

48. 求向量$\boldsymbol{a}=(-2,2,-1)$和$\boldsymbol{b}=(-6,3,6)$之间的角。

49. 已知$\boldsymbol{a}=(1,-1,2)$和$\boldsymbol{b}=(0,2,1)$，求向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$之间的角。

50. 已知三角形的顶点为$A(-1,4,1)$，$B(3,4,-2)$，$C(5,2,-1)$。求$\angle ABC$。

解：求向量$\overrightarrow{BA}$和$\overrightarrow{BC}$的坐标，我们有

$$\overrightarrow{BA}=(-4,0,3),\ \overrightarrow{BC}=(2,-2,1)。$$

$\angle ABC$等于$\overrightarrow{BA}$和$\overrightarrow{BC}$之间的角，因此

$$\cos(\overrightarrow{BA},\widehat{\ \overrightarrow{BC}})=\frac{(-4)\cdot2+0\cdot(-2)+3\cdot1}{\sqrt{(-4)^2+0+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$$

$$=-\frac{1}{3}。$$

51. 在三角形ABC中，已知$A(1,1,5)$，$B(-2,0,7)$，$C(-3,-2,5)$，求$\angle ACB$。

52. 验证下列向量是否垂直：

1) $\boldsymbol{a}=(3,0,-6)$和$\boldsymbol{b}=(4,7,2)$；

2) $\boldsymbol{c}=(-3,2,5)$和$\boldsymbol{d}=(6,-3,1)$。

53. 已知三角形的顶点为：$A(2,4,5)$，$B(-3,2,2)$，$C(-1,0,3)$，求证$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{BC}$。

54. 如果已知向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$和$\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{p}-4\boldsymbol{q}$互相垂直，那么单位向量$\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{q}$组成怎样的角？

§3. 向 量 积

当第三个向量c满足下列条件时（图95）称为两个向量a和b的向量积：

1）向量c的模等于向量a和b的模及它们的夹角的正弦的乘积，即

$$|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\widehat{a, b}) \qquad (7.15)$$

2）向量c垂直于由向量a和b决定的平面；

3）向量c的方向为：由向量c的端点看到a转向b时是逆时针的转向（即向量a，b和c组成右旋有序数组，或叫右手准则）。

a与b的向量积用$a \times b$表示。

向量积的模等于由向量a和b所作的平行四边形的面积S。

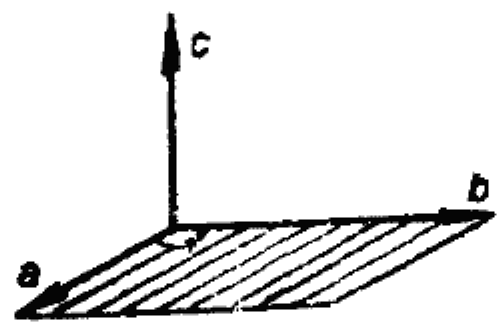


图 95

向量积用下面的公式表示：

$$a \times b = S_e, \qquad (7.16)$$

这里，e为$a \times b$直交方向的单位向量。

下面我们指出向量积的一些基本性质：

1°. 如果向量a和b共线或其中之一为零，那么$a \times b$等于0。

2°. 当交换向量因子的位置时，向量积要改变符号：$a \times b = -b \times a$（即向量积不具有交换律）。

3°. $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$（分配律）。

4°. $(ma) \times b = m(a \times b)$（结合律）。

已知坐标的向量$a = (x_1, y_1, z_1)$和$b = (x_2, y_2, z_2)$

的向量积可按下面的方法计算：

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k$$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\,i+(z_1x_2-x_1z_1)\,j+(x_1y_1-y_1x_2)\,k。\qquad(7.17)$$

向量积的物理意义如下：

如果F表示力，r表示以O为起点的力的作用点的向量半径，那么力F关于点O的力距等于r和F的向量积，即$m_0(F)=r\times F$。

55.求向量积：1）$i\times j$；2）$j\times k$；3）$k\times i$；4）$j\times i$；5）$k\times i$，这里i，j，k为右坐标系中的单位向量。

解：向量$i\times j$与向量k共线且是单位向量，因为以i和j为边的平行四边形（正方形）的面积等于单位1，向量i，j，k组成右旋有序数组，所以$i\times j=k$。

类似地求得：2）$j\times k=i$；3）$k\times i=j$；4）$j\times i=-k$（j，i和k组成右旋数组）；5）$k\times j=-i$；6）$i\times k=-j$。

56．已知：$|a|=4$，$|b|=5$，$(a,b)=30°$，求$a\times b$。

解：根据公式（7.15）求向量积的模：

$$|a\times b|=|a|\cdot|b|\cdot\sin30°=4\cdot5\cdot\frac{1}{2}=10。$$

由公式（7.16）得$a\times b=10e$，这里e为$a\times b$的向量单位。

57.已知：$|a|=4$，$|b|=6$，$(\widehat{a,b})=\varphi$。如果：1）$\varphi=0$；2）$\varphi=90°$；3）$\varphi=150°$，求$a\times b$。

58. 求$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$的向量积。

解： 根据公式（7.17）得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}。$$

59. 求$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$的向量积。

60. 求由向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$组成的平行四边形的面积。

解：两个向量的向量积等于以这两个向量为边的平行四边形的面积。根据公式（7.17）求得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}。$$

由于$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=3$，那么所求的面积为$S=3$（平方单位）。

61. 求以向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$为边的平行四边形的面积。

62. 已知三角形的顶点坐标为：$A(2, -3, 4)$，$B(1, 2, -1)$，$C(3, -2, 1)$，求这个三角形的面积。

63. 已知力$\boldsymbol{F}=(2, 3, -1)$和力的作用点$A(-1, -1, 3)$。求关于坐标原点的力距和力距与坐标轴组成的角。

解：我们来求力的作用点的向量半径$\boldsymbol{r}=(-1, -1, 3)$和力$\boldsymbol{F}=(2, 3, -1)$的向量积：

$$m_0(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}$$

$$+\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = -8\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}。$$

力距的模：

$$|m_0(\boldsymbol{F})| = \sqrt{(-8)^2+5^2+(-1)^2} = 3\sqrt{10}$$

$$= 9.486。$$

力距的方向余弦：

$$\cos\alpha = -\frac{8}{3\sqrt{10}} = -0.8433;\quad \cos\beta = \frac{5}{3\sqrt{10}}$$

$$= 0.5271;$$

$$\cos\gamma = -\frac{1}{3\sqrt{10}} = -0.1054。$$

力距与坐标轴组成的角：

$$\alpha = 147°30';\quad \beta = 58°12';\quad \gamma = 96°03'。$$

检验：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = (-0.8433)^2+(0.5271)^2$

$$+(-0.1054)^2 = 1。$$

64. 已知力$\boldsymbol{F}=(-2, -3, 2)$和力的作用点$A(-1, 3, -1)$。求关于坐标原点的力距和力距与坐标轴组成的角。

§4. 综 合 题

65. 证明：顶点为$A(1, 4, 3)$，$B(2, 3, 5)$，$C(2, 5, 1)$和$D(3, 4, 3)$的四边形是平行四

边形。

66．在纵坐标轴上求一点，使它到点$A(1, -3, 7)$和$B(5, 7, -5)$的距离相等。

67．证明：顶点为$A(3, -1, 2)$，$B(1, 2, -1)$，$C(-1, 1, -3)$和$D(3, -5, 3)$的四边形是梯形。

68．已知：三角形的顶点为$A(10, -2, 8)$，$B(8, 0, 7)$和$C(10, 2, 8)$。求三角形的周长。

69．线段AB的端点为$A(-6, 1, 14)$和$B(9, 4, -9)$。将这条线段分成三等分，求分点的坐标。

70．已知向量$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$。求向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的坐标。

71．向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$的端点为$A(-4, 1, 3)$和$B(2, -5, 6)$。求向量$\boldsymbol{a}$与基础向量组成的角的余弦。

72．已知向量$\boldsymbol{a}=(2, 2, -1)$和$\boldsymbol{b}=(-3, 6, -6)$。求它们的夹角的余弦。

73．已知以向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$为边的平行四边形，求它的对角线组成的锐角。

小 测 验

第一组

1）向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$的端点坐标为：$A(2, 4, -3)$和$B(6, -3, 1)$。求向量$\overrightarrow{AB}$的长和它与基础向量组成的角的余弦。

2）已知向量$\boldsymbol{a}=(2, -4,$

第二组

1）已知顶点为$A(-2, -4, 0)$，$B(-2, -1, 4)$和$C(-2, 3, 1)$的三角形。求它的内角A。

2）已知三个向量：$\boldsymbol{a}=12\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$

5）和$\boldsymbol{b}=(4,\ -3,\ 5)$。

3）求向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$的向量积。

$-2\boldsymbol{k}$。求向量$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$在向量$\boldsymbol{a}$的射影。

3）计算以向量$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$为边的平行四边形的面积。

第八章　空间的直线和平面

§1. 立体几何的基本概念、空间的平行关系

1. 立体几何的基本概念，有关平面的公理

1．读出下列表示法并作出它们的简图：

1）$A\in\alpha$；　2）$A\notin\beta$；　3）$a\subset\alpha$；

4）$a\not\subset\beta$；　5）$B\in p$；　6）$M\notin q$；

7）$a\cap\alpha=A$；　8）$a\cap p=P$；　9）$b\cap\beta=B$；

10）$\alpha\cap\beta=q$；　11）$\{A,B,C\}\subset\beta$；　12）$\{M,N\}\subset p$；

13）$\alpha\not\subset\beta$；　14）$M\notin(AB)$；　15）$(CD)\not\subset\alpha$。

2．写出下列论断的简略表示法：

1）点B属于平面β；

2）直线a不属于平面γ；

3）点A和B属于直线b；

4）直线q与直线MN相交于点A；

5）直线p与平面α相交于点C；

6）平面α和β相交于直线p；

7）平面α和β相交；

8）点A，B和C属于平面α；

9）点C不属于平面β。

3．已知$\alpha\cap\beta=m$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\cap b=A$。证明$A\in m$。

4．简述下列定理的原意，并利用符号写出证明：

1）如果$A\in a$，$a\subset\alpha$，那么$A\subset\alpha$；

2）如果$\{A, B\}\subset p$，$\{A, B\}\subset\alpha$，那么$p\subset\alpha$；

3）如果$\{A, B\}\subset p$，$p\subset\alpha$，那么$\{A, B\}\subset\alpha$；

4）如果$a\subset\alpha$，$A\in a$，那么$A\in\alpha$；

5）如果$\alpha\cap\beta=a$，$M\in\alpha$，$M\in\beta$，那么$M\in a$。

5．在下列条件下可以作多少不同的平面：

1）通过一个点；2）通过两个不同的点；3）通过三个不同的点。

6．已知：$a\cap b=M$，$a\subset\alpha$。判断：1）$M\in\alpha$；2）$b\subset\alpha$是否正确。

7．已知线段AB，BC，CD，DA，且$(AC)\cap(BD)=M$。证明：已知的各线段在一个平面内。

8．证明：

1）如果平面和不属于它的一条直线有公共点，那么这个点是唯一的；

2）直线a和通过点A（$A\in a$）的直线在一个平面内；

3）一条直线和在一个平面内的两条平行线相交，那么这三条直线在一个平面内。

9．由空间一点作四条射线，通过这四条射线可以作多少个平面？研究所有可能的情况。

10．1）经过点$M\in q$作与直线q组成的角为已知角的直线；

2）经过点A作直线，使它与已知直线p组成的角为已知角（$A\notin p$）。

2. 关于作多面体截面的简单问题

一个割平面与多面体相交，它与各侧面相交成有限的线段，由这些线段围成的平面部分叫做多面体的截面。多面体截面的作法必须满足下列两点：1）求出割平面的位置；2）求出割平面与多面体侧面的交线。

11. 在四面体$S\text{-}ABC$中，过棱SA，SB和AC上的点K，L，M作截面（直线KL与AB不平行；图96）。

解：我们用α表示过点K，L，M的平面。平面α与平面SAB有公共点K和L，因此，平面SAB与平面α相交于直线KL。线段KL是侧面SAB与平面α的相交线。类似地可作线段KM。

侧面ABC与割平面α有公共点M。为了作出这两个平面的相交线，还需要求出一个公共点，直线KL与AB的交点D〔$D\in\alpha$和$D\in(ABC)$〕就是所求的另一个公共点，连结MD交棱BC于点N。线段MN和NL是所求截面的另两条边。

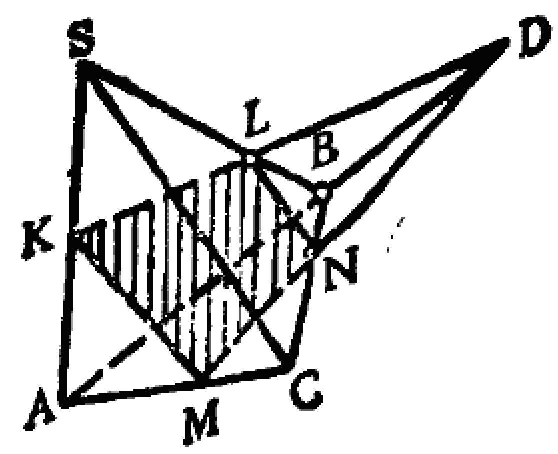


图 96

作法用符号表示为：

1) $\alpha=(MKL)$；2) $[KL]=\alpha\cap\triangle ASB$；3) $[KM]=\alpha\cap\triangle ASC$；4) $(KL)\cap(AB)=D$；5) $(DM)\cap[BC]=N$；6) $[MN]=\alpha\cap\triangle ABC$；7) $[NL]=\alpha\cap\triangle BSC$。

$MKLN$为所求的截面。

12. 已知四面体$S\text{-}ABC$和点M及N，$M\in[SC]$，$N\in[AB]$。求作截面ABM和SCN。

13. 已知立方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，且$K\in AA_1$，$L\in CC_1$，$M\in DC$。试通过点K，L，M作立方体的截面。

14. 在立方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，试按照下列条件作截面：

1）过顶点A_1，B和D；

2）过由一个顶点引出的各棱的中点；

3）过底的对角线和顶点A；

4）过棱AA_1，CC_1和BC上的三点。

15. 在四面体$S\text{-}ABC$中，过棱SA，AC和BC上的三点作截面。

16. 在四面体$S\text{-}ABC$中，试作过顶点A和点$M\in[AB]$及$N\in[AC]$的截面。

17. 过四面体$S\text{-}ABC$的顶点A和棱BS和CS的中点作截面，如果四面体的棱长等于a，求这个截面的面积。

18. 过四面体$S\text{-}ABC$的棱SA和侧面ACB的三条中线的交点作截面。如果四面体的棱长等于a，求截面的面积。

3. 异面直线

为了求异面直线a和b之间的距离，需要过直线b作平面α，使$\alpha /\!/ a$，并由直线a上任意一点A向平面α作垂线AA_1（图97）。

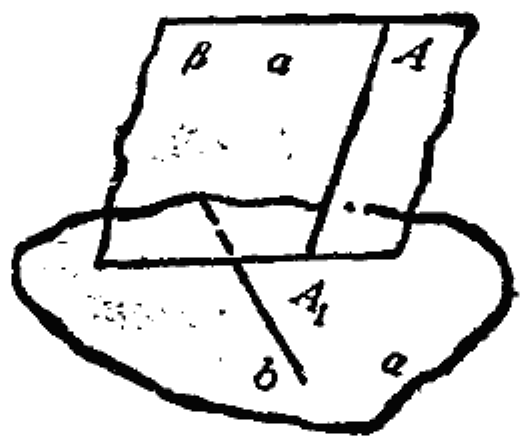


图 97

19. 在立方体模型上，指出成异面直线的各棱。

20. 过已知点作直线，使它与已知直线成异面直线。

21. 四面体有多少对棱成异

面直线？

22. 已知a和b是异面直线，且$\{A_1, A_2\} \in a$，$\{B_1, B_2\} = b$。证明：(A_1B_1)和(A_2B_2)，(A_1B_2)和(A_2B_1)是异面直线。

4. 平行直线

23. 长为50cm的已知线段的两个端点到平面的距离分别为30cm和44cm。求这条线段在平面上的射影。

24. 长为15cm的线段与平面相交，其端点到平面的距离分别为3cm和6cm。求这条线段在平面上的射影。

25. 一条线段与平面相交，其端点到平面的距离分别为3cm和12cm。求这条线段的中点到平面的距离。

5. 直线和平面的平行关系

26. 1）已知点A和直线a，且$A \notin a$。试过点A作直线，使它平行于已知平面。

2）已知点A和直线a，且$A \notin a$。试通过点A作平行于直线A的平面。

27. 已知$a /\!/ b$。试通过直线a作平面，使它平行于直线b。

28. 过已知点作线段，使它在已知平面上的射影长等于线段的长。

29. 已知四面体$S\text{-}ABC$，且$M \in [AS]$和$N \in [AC]$。试通过点M和N作四面体的截面，使它平行于直线AB。

解：分析：假设截面已经作出（图98）。连结点M和点N得到截面与侧面ASC的交线。按照条件，直线AB平行于截面，因此侧面ABC和ABS与截面交成的线段PN和MQ都

平行于直线AB。

作法：1)作$[NP]\parallel(AB)$，$P\in[BC]$；

2)作$[MQ]\parallel(AB)$，$Q\in[SB]$。

四边形$NMQP$为所求的截面。

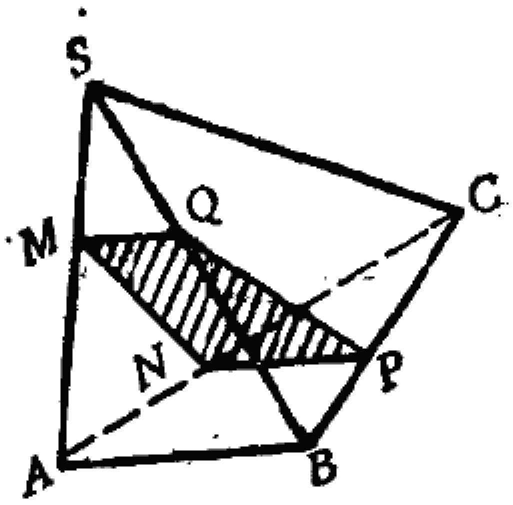


图 98

证明：由于$(MQ)\parallel(AB)$，那么平面$NMQP$平行于直线AB。

讨论：由于棱BC与截面仅有唯一的交点P，且通过点M，N，P可以作唯一的一个平面，因此本题只有一解。

我们采用的是解作图题的一般格式（分析，作法，证明，讨论）。

30．在立方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中作截面：

1）通过棱AB和D_1C_1；

2）通过棱AD及棱BB_1的中点；

3）通过棱AD和BC的中点且平行于棱DD_1；

4）通过棱CC_1的中点且平行于棱AB和A_1D_1。

31．在四面体$S\text{-}ABC$中，通过棱AC的中点作平行于AB和CS的截面。

32．过四面体$S\text{-}ABC$的棱BS和CS的中点及棱AC上的一点D，作这个四面体的截面。

33．已知平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$。求作直线AC_1与过棱DC和A_1B_1的平面的交点。

6．平行平面

34．1）已知：$\alpha\parallel\beta$，$(AB)\parallel(CD)$，$\{A, C\}\subset\alpha$，

$\{B, D\} \subset \beta$。证明：$|AB| = |CD|$ 。

2）已知：$\alpha /\!/ \beta$，$b \subset \beta$。证明：$b /\!/ \alpha$。

3）已知：$\alpha /\!/ \beta$，$\{A, B\} \subset \alpha$，$\{C, D\} \subset \beta$，$(AC) /\!/ (BD)$ 。证明：$ABCD$为平行四边形。

35．已知：$\alpha /\!/ \alpha_1$，$\beta /\!/ \beta_1$，$\alpha \cap \beta = C$，$\alpha_1 \cap \beta_1 = C_1$。证明：$C /\!/ C_1$。

36．过四面体$S\text{-}ABC$的侧面ASB上的一点作截面，使它平行于指定的平面：1）侧面ABC；2）侧面ASB。

37．过棱柱侧面上一点作截面，使它平行于指定的平面：1）棱柱的底面；2）棱柱的对角面。

38．由一点S作两条直线。这两条直线分别与三个平行平面相交于A_1，A_2，A_3和B_1，B_2，B_3。已知$|A_1A_2| = 4\text{cm}$，$|B_2B_3| = 9\text{cm}$，$|A_2A_3| = |B_1B_2|$ 。计算$|A_1A_3|$和$|B_1B_3|$ 。

39．在四面体$S\text{-}ABC$中作截面$A_1B_1C_1$和$A_2B_2C_2$。这两个截面平行于侧面ABC。已知$|SB_1| = |A_1A_2| = 6\text{cm}$，$|C_1C_2| = |B_2B_1| = 12\text{cm}$，$|SA_1| = 4\text{cm}$。计算$|SA|$，$|SB|$，$|SC|$ 。

§2. 空间中的垂直、二面角和多面角

1. 直线和平面的垂直

40．已知平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，且$M \in [AB]$。过点M作平行六面体的截面，使它垂直于直线AB。

41．若$ABCD$为平行四边形，S为它的所在平面外的一点，O为对角线的交点，$|SA| = |SC|$，$|SB| = |SD|$ 。证

明：$SO \perp$ 平面$ABCD$。

42．已知：1）$p \perp a \subset \alpha$，$a /\!/ b$；2）$p \perp a \subset \alpha$，$p \perp b \subset \alpha$，$a \cap b$；3）$q \subset a \mid \alpha$，$q \perp b \subset \alpha$，$p /\!/ q$，$a \cap b$。在这些条件中，哪一些$p \perp \alpha$，为什么。

2． 点到平面的距离

43．正方体的对角线等于m。求由正方体的顶点到它所对的侧面的距离。

44．正三角形的边长等于a，点M为三角形所在平面外的一点，它到三角形的三个顶点的距离都等于l。求点M到三角形所在平面的距离。

45．直角三角形的直角分别等于a和b。点M位于距三角形所在平面等于h的地方，且它到三角形三个顶点的距离相等，求这个距离。

3． 异面直线的公垂线

端点在两条异面垂线上而且与这两条直线都垂直的线段，称为异面直线的公垂线。

异面直线公垂线的长就是这两条异面直线间的距离。

46．已知直平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$。指出下列直线的公垂线：1）AB和DD_1；2）BC和AA_1；3）A_1D_1和DC。

47．在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，如果棱长等于a，求直线BB_1和AC之间的距离。

4． 三垂线定理

48．一个直角三角形的两直角边长分别等于 15cm 和 20

cm。由这个三角形的直角顶点作这个三角形所在平面的垂线，这条垂线长等于16cm。求垂线的终点到三角形斜边的距离。

49. 一个三角形的边长分别等于51cm，30cm和27cm。由三角形最小角的顶点作三角形所在平面的垂线，这条垂线长等于10cm。求由垂线的终点到三角形的对边的距离。

50. 菱形的对角线长分别等于60cm和80cm。由对角线的交点作菱形所在平面的垂线，这条垂线长等于45cm。求由垂线终点到菱形各边的距离。

51. 等腰梯形的两底分别等于16cm和30cm。点M的位置到梯形各边的距离均等于11cm。计算由点M到梯形所在平面的距离。

52. 正三角形的边长等于a。点M到三个顶点的距离相等，它到三角形所在平面的距离等于h，求由点M到三角形各边的距离。

5. 斜线和平面之间的夹角

53. 在直平行六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，如果$|AB| = |BC| = a$，$|AA_1| = 2a$，求对角线AC_1与具有公共顶点A的各侧面的倾斜角。

54. 空间的一点到已知平面的距离等于a。由这点作两条与平面成45°角的斜线，而这两条斜线在平面上的射影间的夹角为120°。求斜足间的距离。

55. 在等腰直角三角形中，一条直角边与平面成45°角，而另一条直角边在这个平面上。证明：斜边与平面成30°角。

56. 斜线AB与平面α成45°角，而直线AC在平面上，它与斜线AB在平面上的射影成45°角。证明：$\angle BAC = 60°$。

57．证明：在正三棱锥中，如果高等于底边的长，那么侧棱与底面成60°角。

6．二面角

58．已知一个二面角的平面角为60°，在二面角的一个面上有一点，它到二面角棱的距离等于m。求这点到二面角另一个面的距离。

59．已知一个二面角的平面角为120°。在二面角内部有一点M，它到两个面的距离都等于m。求由这点到二面角棱的距离。

60．两个等腰三角形具有公共底边，它们所在的两个平面成60°角。公共底长等于12cm，一个三角形的腰等于10 cm，另一个三角形的两腰互相垂直。求这两个三角形顶点之间的距离。

61．长度为a的线段的两端在直二面角的两个面上，线段与每个面都成α角。计算这条线段在二面角棱上的射影。

7．平面的垂直

62．线段AB的端点在两个互相垂直的平面上。由点A和B向两平面的交线引垂线，这两条垂线长分别等于a和b，两垂足间的距离等于c。计算线段AB的长和它在已知平面上的射影长。

63．在正六棱锥中，底面边长等于4cm，侧棱长为8cm。通过底面两邻边的中点作垂直于底的平面。计算截面的面积。

8. 平面图形射影的面积

64．多边形的面积等于150cm²，它所在的平面与一个已知平面成60°角。求这个多边形在平面上射影的面积。

65．已知三角形的三边分别等于$a=13$cm，$b=14$cm，$c=15$cm。过边BC作平面α，使它与平面ABC成30°角。求三角形的面积在平面α上的射影。

66．如果多边形的面积在一个平面上的射影等于20m²，并且多边形所在平面与它的射影平面之间的二面角等于45°。求这个多边形的面积。

67．已知圆的半径为2m，一个平面与圆所在的平面成30°角。求这个圆在平面上射影的面积。

9. 三面角

68．1）证明：在三面角中，如果有两个二面角是直角，那么它们相对的二面角也是直角。

2）证明：在三面角中，如果有两个二面角是直角，那么和它们相对的平面角也是直角。

69．三面角的每个平面角都等于60°。由顶点起在一条棱上截取长度为a的线段，并由线段的端点作对面的垂线。求这条垂线的长。

70．已知三面角的每个平面角都等于α。计算三面角的棱与所对平面间的夹角。

§3．综合题

71．在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，棱长等于a。过

A_1D和D_1C_1的中点及顶点A作正方体的截面。计算这个截面的面积。

72．已知点O在两个平行平面α和β的外部。由点O引三条射线分别交平面α和β于点A，B，C和A_1，B_1，C_1（$OA<OA_1$）。如果$|OA|=m$，$|AA_1|=n$，$|AB|=c$，$|AC|=b$，$|BC|=a$，计算三角形$A_1B_1C_1$的周长。

73．已知：点M在直角三角形ABC（$\angle C=90°$）所在平面的外部，且$[MA]\perp[AC]$，$[MC]\perp[CB]$。求证：$[MA]\perp$平面ABC。

74．梯形的上底在平面α上，下底到平面α的距离等于10 cm，两底之比为3∶5。求梯形对角线的交点到平面α的距离。

75．在三角形ABC中，角B是直角，$|BC|=a$。由顶点A引三角形所在平面的垂线AD。如果$|DC|=m$，求由点D到直角边BC的距离。

76．三角形的三条边长分别为10cm，17cm和21cm。由最大角的顶点引三角形所在平面的垂线，使垂线长为15cm。计算由垂线在平面外的端点到三角形最长边的距离。

77．已知直角三角形的两条直角边分别等于18cm和32 cm。由斜边的中点D引三角形所在平面的垂线DE，使$|DE|=12$cm。计算由点E到两条直角边的距离。

78．过正方形的一个顶点作它所在平面的斜线，使斜线与正方形过这个顶点的每条边都成α角。求这条斜线与正方形的对角线之间的夹角。

79．平面通过菱形的一边，且与菱形对角线之间的夹角为α和2α。计算菱形的锐角。

80．等腰三角形的底长为a，顶角为α。过三角形的底作平面，使它与两腰都成β角。求三角形顶点到这个平面的

距离。

81．夹在两平行平面间的两线段的比为2:3，这两条线段与平面组成的角之比为2。计算这两个角。

82．两个全等的正方形具有公共边，且它们所在平面组成的二面角等于α。由一个公共顶点作每个正方形的对角线。计算这两条对角线之间的角。

83．一个二面角的平面角为锐角。过二面角的一个面作直线，与另一个面成30°角，与棱成45°角。求这个二面角。

84．两个等腰三角形具有公共底边，且它们所在平面成60°角。公共底等于16cm，一个三角形的腰等17cm，另一个三角形的腰互相垂直。计算两个三角形顶点之间的距离。

85．已知一个二面角等于α。过二面角的一个面作直线，与二面角的棱组成角β。求这条直线对另一个面的倾斜角。

86．已知一个三面角的每个面角都等于60°。在一条棱上取一点A，使它到三面角顶点的距离为a。过点A作垂直于这条棱的平面，与另两条棱相交于B和C。求三角形ABC的周长。

87．已知三面角有两个面角等于45°，而第三个面角等于60°。求第三个面角所对的二面角。

88．已知三面角的每个面角都等于α，求它的二面角。

小 测 验

第一组

1）由锐角为30°的直角三角形的外接圆的圆心作它所在平面的垂线，使垂线长等于6cm。垂线在三角形所在平面外的端点到较

第二组

1）已知平面上的直角三角形的斜边等12cm。空间的一个点到三角形的每个顶点的距离都等于10cm。计算这个点到平面的距

长直角边的距离为10cm。求直角三角形斜边的长。

2）两个等腰三角形ABC和ACD具有公共底边AC，它们组成的二面角等于60°，而边BC与平面ADC组成的角等于45°。计算三角形ABC的面积。

离。

2）已知等腰三角形ABC的底边AC在平面α上，而顶点B到平面α的距离为$3\sqrt{2}$ cm。如果$|AC|=18$cm，三角形ABC所在平面与平面α成45°角。计算三角形ABC的面积。

第九章　空间的直线和平面的方程

§1.　平面

1.　平面方程

设P为一个平面，M_0（x_0，y_0，z_0）为这个平面上的一点（图99），而$\boldsymbol{n}$=（A，B，C）为垂直于平面P的一个非零的向量（这个向量称为平面的法向量）。如果M（x，y，z）是平面P上异于M_0的任意一点，那么向量$\overrightarrow{MM_0}$=（$x-x_0$，$y-y_0$，$z-z_0$）垂直于向量$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$=（$A$，$B$，$C$），即这两个向量的数量积等于零：

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0。\qquad(9.1)$$

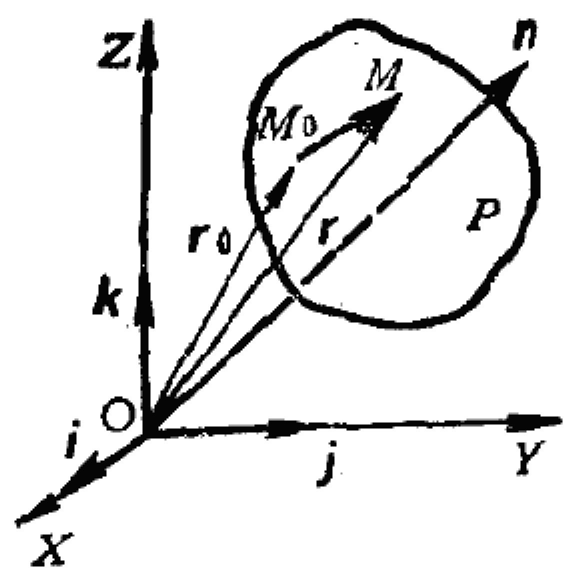


图 99

方程（9.1）称为平面的向量式方程。如果将它写成坐标形式，那么可得方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\qquad(9.2)$$

这个方程称为通过已知点且具有已知方向的平面方程。

方程(9.2)可化简为

$$Ax+By+Cz+D=0，\qquad(9.3)$$

这里$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$。方程（9.3）称为平面的一般方程。我们注意到，由于法向量$\boldsymbol{n}$不为零，那么一般方程

的系数A，B和C不同时为零。

下面我们来研究平面方程的特殊情形：

1）如果$D=0$，那么平面的方程为$Ax+By+Cz=0$，平面通过坐标原点。

2）如果$C=0$，那么平面的方程为$Ax+By+D=0$。由于法向量$n=(A, B, O)$垂直于OZ轴，那么此平面平行于OZ轴。

类似地，当$A=0$及$B=0$时，得平面$By+Cz+D=0$和$Ax+Cz+D=0$。这时平面相应地平行于OX轴和OY轴。

3）如果$C=D=0$，那么平面的方程为$Ax+By=0$，这时平面通过坐标原点且平行于OZ轴，即平面通过OZ轴。

类似地，当$A=D=0$与$B=D=0$时，得平面$By+Cz=0$和$Ax+Cz=0$。这时平面相应地通过OX轴和OY轴。

4）如果$C=B=0$，那么平面的方程为$Ax+D=0$。这时平面平行于OY轴和OZ轴，即平面垂直于OX轴。

类似地，当$A=B=0$和$A=C=0$时，得平面$Cz+D=0$和$By+D=0$。这时平面相应地垂直于OZ轴和OY轴。

5）如果$B=C=D=0$，那么平面的方程为$Ax=0$，即$x=0$。这时平面与平面yoz重合。

类似地，当$A=C=D=0$与$A=B=D=0$时，得平面$y=0$和$z=0$。这时平面与坐标平面xoz和xoy对应重合。

2. 两个平面的夹角

两个平面间的夹角等于它们的法量间的夹角。

设两个相交平面

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

的法向量为$n_1=(A_1, B_1, C_1)$和$n_2=(A_2,B_2,C_2)$，那么两个平面间的夹角可按下式计算：

$$\cos\varphi = \pm\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

$$= \pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{9.4}$$

3. 两个平面平行和垂直的条件

要使两个平面平行，它们的法向量n_1和n_2必须共线，即$n_1=\lambda n_2$，这里$\lambda\neq 0$。如果向量n_1和n_2的坐标均不等于零，那么由最后的等式可得：

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}, \tag{9.5}$$

即对应坐标的系数成比例。

要使两个平面互相垂直，它们的法向量n_1和n_2也必须垂直，即它们的数量积等于零：$n_1 \cdot n_2=0$。由此得：

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0。 \tag{9.6}$$

1．已知点$A(3,-2,-1)$，$B(0,0,2)$，$C(-3,1,0)$，$D(-4,-2,2.5)$。指出哪些点属于平面$2x-3y+4z-8=0$。

2．求通过点$M_0(-3,0,2)$且垂直于向量$n=(2,3,5)$的平面的方程。

解：这里$A=2$，$B=3$，$C=5$。将系数A，B，C的值和点M_0的坐标代入方程（3.2），得：

$$2(x+3)+3(y-0)+5(z-2)=0 \text{ 或}$$

$$2x+3y+5z-4=0。$$

3. 求通过点M_0（3，4，5）且垂直于向量$n=(-1,-3,2)$的平面的方程。

4. 求通过点$M_0(2,-3,-1)$且垂直于向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的平面的方程，这里$M_1(3,4,1)$，$M_2(1,-2,-3)$。

5. 已知点$A(3,-2,4)$和$B(1,4,2)$。求通过点A且垂直于向量$\overrightarrow{AB}$的平面的方程。

6. 求通过点$M_0(2,-1,3)$且垂直于OX轴的平面的方程。

解：垂直于OX轴的平面的方程形式为$Ax+D=0$。将M_0的坐标代入这个方程，得$D=-2A$。现在我们将D的值代入方程$Ax+D=0$，得$Ax-2A=0$，即$x-2=0$。

7. 求通过点$M_0(-2,-3,-1)$且垂直于OZ轴的平面的方程。

8. 求通过点$M_0(2,-2,3)$且平行于平面XOY的平面的方程。

9. 求平行于平面XOZ且通过点$M_0(-3,-2,-4)$的平面的方程。

10. 求通过OX轴和点$M(3,2,4)$的平面的方程。

解：所求的方程形式为$By+Cz=0$。将点M的坐标代入这个方程，得$2B+4C=0$，即$B=-2C$。然后将B的值代入方程$By+Cz=0$，求得$-2Cy+Cz=0$，即$2y-z=0$。

11. 求通过OZ轴及点$M(1,1,1)$的平面的方程。

12. 求通过OY轴及点$M(-2,-3,-4)$的平面的方程。

13. 求平行于OZ轴且通过点$M_1(3,-1,2)$和$M_2(-2,3,4)$的平面的方程。

解：由于所求的平面平行于OZ轴且通过点$M_1(3, -1, 2)$和$M_2(-2, 3, 4)$，那么它的法向量可以取垂直于向量$\overrightarrow{M_1M_2}=(-5, 4, 2)$和$n=(0, 0, 1)$（$OZ$轴的单位向量）的向量。另外，两个向量的向量积也是一个向量，它垂直于向量因子。因此，n可用$\overrightarrow{M_1M_2}$和n_1的向量积来表示。于是有：

$$n=\overrightarrow{M_1M_2}\times n_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=i\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=4i+5j。$$

仍然利用通过已知点$M_1(3, -1, 2)$且垂直于向量$n=(4, 5, 0)$的平面方程。我们求得：

$$4(x-3)+5(y+1)=0 \text{或} 4x+5y-7=0。$$

14．求平行于OY轴且通过点$M_1(1, -2, 1)$和$M_2(3, 2, -4)$的平面的方程。

15．求平行于OX轴且通过点$M_1(-4, 2, 5)$和$M_2(-5, -1, 3)$的平面的方程。

16．求通过点$M_0(2, -1, 3)$且平行于向量$a=(3, 0, -1)$和$b=(-3, 2, 2)$的平面的方程。

解：显然，所求平面的法向量$n=(A, B, C)$可以取成向量a和b的向量积：

$$n=a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}。$$

利用方程（6.2），当$A=2$，$B=-3$，$C=6$，$x_0=2$，$y_0=-1$，$z_0=3$时，我们求得：

$$2(x-2)-3(y+1)+6(z-3)=0 \quad 或$$

$$2x-3y+6z-25=0。$$

17．求通过点M_0（-4，-3，1）且平行于向量$\boldsymbol{a}=$（5，2，-3）和$\boldsymbol{b}=$（1，4，-2）的平面的方程。

18．求通过点M（-2，3，4）且平行于平面$x+2y-3z+4=0$的平面的方程。

解：由于所求的平面平行于平面$x+2y-3z+4=0$，因此它的法向量可取已知平面的法向量$\boldsymbol{n}=$（1，2，-3）。现在利用通过已知点的已知方向上的平面的方程，我们求得：

$$(x+2)+2(y-3)-3(z-4)=0 \quad 或$$

$$x+2y-3z+8=0。$$

19．求通过点M（-1，-2，3）且平行于平面$2x-3y+z-1=0$的平面的方程。

20．求通过点M_1（-2，-3，1）和M_2（1，4，-2）且垂直于平面$2x+3y-z+4=0$的平面的方程。

解：我们把向量$\overrightarrow{M_1M_2}=$（3，7，-3）和$\boldsymbol{n}_1=$（2，3，-1）的向量积当作所求平面的法向量$\boldsymbol{n}$（参看习题13和16）。因此有：

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 7 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}。$$

利用通过已知点 $M_1(-2, -3, 1)$ 且垂直于向量 $\boldsymbol{n} = (2, -3, -5)$ 的平面的方程，求得

$$2(x+2) - 3(y+3) - 5(z-1) = 0，或$$

$$2x - 3y - 5z = 0。$$

我们可以看出，在建立所求平面的方程时，也可以不取点 M_1 而取点 M_2。

21．求通过点 $A(1, -4, -3)$ 和 $B(4, -2, -1)$ 且垂直于平面 $x - y - 3z + 7 = 0$ 的平面的方程。

22．求通过点 $M_1(2, -1, -3)$ 和 $M_2(-3, 4, 1)$ 且垂直于平面 $x - y - 3z + 2 = 0$ 的平面的方程。

23．求通过点 $M(-1, -1, 2)$ 且垂直于平面 $x + 2y - 2z + 4 = 0$ 和 $x - 2y + z - 4 = 0$ 的平面的方程。

24．求平面 $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ 和平面 $3x - 4y - z + 3 = 0$ 所夹的锐角。

解：要计算两个平面间的锐角 φ，可利用公式（9.4）。由于 $\cos\varphi > 0$，那么我们可将等式的右边取绝对值。我们有 $A_1 = 2$，$B_1 = -3$，$C_1 = 4$ 和 $A_2 = 3$，$B_2 = -4$，$C_2 = -1$，所以

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot3 + (-3)\cdot(-4) + 4\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}\cdot\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{14}{\sqrt{29\cdot26}} = 0.5098;$$

$$\varphi = 59°21'。$$

25．求平面$x-y+z+1=0$和$2x+3y-z-3=0$所夹的锐角。

26．求由点A（2，3，4）到平面$4x+3y+12z-5=0$的距离。

解：设由点A到已知平面的距离为$|AB|$。向量$\overrightarrow{AB}$与向量$n=$（4，3，12）共线，因此$\overrightarrow{AB}=\lambda n$。如果用$x_1$，$y_1$，$z_1$来表示点$B$的坐标，我们可求得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_1-2,\ y_1-3,\ z_1-4)$。

由等式$\overrightarrow{AB}=\lambda n$可以得出$x_1-2=4\lambda, y_1-3=3\lambda, z_1-4=12\lambda$。利用两点间的距离公式，我们有：

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(4\lambda)^2+(3\lambda)^2+(12\lambda)^2}=13|\lambda|。$$

由于点$B(x_1,\ y_1,\ z_1)$的坐标满足平面的方程，那么

$$4(2+4\lambda)+3(3+3\lambda)+12(4+12\lambda)-5=0,$$

即$\lambda=-\frac{60}{169}$。

所以$|AB|=13\cdot\left|-\frac{60}{169}\right|=\frac{60}{13}$。

27．求由点A（1，-2，1）到平面$10x-2y+11z-10=0$的距离。

28．求由点A(2，3，-2)到平面$6x-7y-6z-22=0$的距离。

29．求平行平面$2x-3y+6z+28=0$和$2x-3y+6z-14=0$之间的距离。

解：为了求这个距离，需要在一个平面上取一点，并确定由这点到另一个平面的距离。设在第一个平面方程中$y=$

0，$z=0$，那么我们有$2x+28=0$，即$x=-14$。于是得到了点M（-14，0，0）。

现在，用习题26中使用的方法，我们可求得由已知点M（-14，0，0）到已知平面$2x-3y+6z-14=0$的距离。这个距离等于6（请亲自验证这个结果）。

30．求两个平行平面$x-y+2z-4=0$和$x-y+2z+10=0$之间的距离。

§2. 空间直线

1. 空间直线方程

通过已知点M_0（x_0，y_0，z_0）且平行于向量$\boldsymbol{q}=(m, n, p)$的直线的方程形式为：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{q}。\qquad (9.7)$$

这个方程称为直线的向量参数方程。这里$\boldsymbol{r}$表示直线上任意点M（x，y，z）的向量半径（图9），$\boldsymbol{r}_0$表示点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的向量半径，而t为参数，它可以取所有可能的实数值。向量$\boldsymbol{q}$称为直线的方向向量，而它的坐标(即m，n，p)称为直线的方向系数。

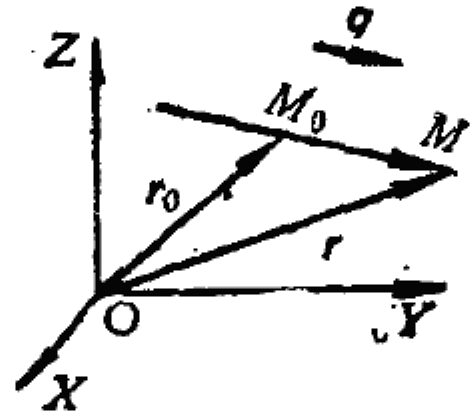


图 100

如果在方程(9.7)中使用相应向量的坐标，那么就得到直线的参数方程：

$$x=x_0+tm,$$
$$y=y_0+nt,$$
$$z=z_0+pt。\qquad (9.8)$$

如果从方程(3.8)消去参数t，

那么就得到直线的典型方程：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}。\tag{9.9}$$

通过两点M_1（x_1，y_1，z_1）和M_2（x_2，y_2，z_2）的直线的方程形式为：

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}。\tag{9.10}$$

空间直线可看作是两个平面的交线，即直线可由已知的两个线性方程构成的方程组来确定：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0。\end{cases}\tag{9.11}$$

方程（3.11）称为直线的一般方程。

2．直线的方向余弦

向量$q=(m,n,p)$的方向余弦称为直线的方向余弦。由于直线的方向向量可以取$-q=(-m,-n,-p)$，因此直线具有三对方向余弦：

$$\cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}。\tag{9.12}$$

3．空间的两条直线平行和垂直的条件。两条直线间的夹角

设给定两条直线：

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{和}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

那么这两条直线平行的条件为：

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}; \tag{9.13}$$

两条直线垂直的条件为：

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0; \tag{9.14}$$

而两条直线间的夹角φ可按下式计算：

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{9.15}$$

31．求通过点M_0（2，1，3）且平行于向量$\boldsymbol{q}=(4, -5, -6)$的直线的方程。

解：利用等式（9.9），我们可求得直线的典型方程：

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-3}{-6}。$$

如果将这个方程写成方程组的形式，那么我们可得直线的一般方程：

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-5},\\[2ex] \dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-3}{6},\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}5x+4y-14=0\\ 6y-5z+9=0。\end{cases}$$

32．求通过点M_0（3，0，－2）且平行于向量$\boldsymbol{q}=$

（2，1，1）的直线方程。

33．求通过点M_0（1，0，-2）且平行于向量$q=(2, 1, 0)$的直线方程。

34．求平行于OX轴且通过已知点M（1，1，1）的直线方程。

解：直线的方向向量q与OX轴共线，因此它在OY轴和OZ轴上的射影等于零。向量q可以取两个可能方向的任何一个，长度可任取。我们取$|q|=1$且选与OX轴的正方向相同的方向，那么$q=(1, 0, 0)$。于是我们可建立直线的典型方程：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{0}。$$

因此，所求直线的一般方程为

$$\begin{cases} y-1=0, \\ z-1=0。\end{cases}$$

35．求平行于OZ轴且通过点$M(2, -1, 3)$的直线的方程。

36．如果直线的方向向量为：a）$q=(0, 0, 1)$；b）$q=(0, 1, 0)$；в）$q=(1, 0, 2)$。那么直线关于坐标轴的位置怎样？

37．已知一条直线通过点$A(-1, 2, 1)$且平行于直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{1}$。求这条直线的方程。

解：由于所求的直线平行于已知直线，那么可以取已知直线的方向向量$q=(2, 3, 1)$作为它的方向向量。利用等式（9.9），我们得到所求直线的典型方程：

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{1}。$$

38．求通过点$A(2,-3,-1)$且平行于直线$\frac{x-4}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$的直线的方程。

39．求通过坐标原点和点$A(2,-3,-2)$的直线方程。

解：我们取$q=(2,-3,-2)$作为方向向量并利用公式（9.8），得：

$$x=2+2t,\ y=-3-3t,\ z=-2-2t。$$

40．求过坐标原点和点$M(1,4,-3)$的直线方程。

41．求通过点$A(1,-2,-1)$和$B(3,0,4)$的直线方程。

解：根据公式（9.10）得：

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{0+2}=\frac{z+1}{4+1}，或$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{5}。$$

42．求通过点$A(-2,-1,-3)$和$B(0,2,1)$的直线的方程。

43．计算直线$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{6}$与坐标轴所成的角。

解：根据公式（9.12）得：

$$\cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \pm\frac{3}{7},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{2}{7}，\cos\gamma = \pm\frac{6}{7}。$$

44．计算直线$\frac{x-1}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{12}$与坐标轴之间的夹角。

45．证明：直线$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{2}{-4}$和直线$\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-5}{2}$互相垂直。

46．计算直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{2}$ 和

$$\frac{x+1}{12}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{4}\text{所夹的锐角。}$$

解：设在等式(9.15)中$m_1=2$，$n_1=1$，$p_1=2$和$m_2=12$，$n_2=3$，$p_2=4$，从而求得：

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot12+1\cdot3+2\cdot4}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{12^2+3^2+4^2}}=0.8974。$$

$\varphi=26°11'$。

47．计算两直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{4}$ 和

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{-2}\text{所夹的锐角。}$$

§3. 平面和直线的关系

直线

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \qquad (*)$$

和平面

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (**)$$

之间的夹角可按下式计算：

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}。 \qquad (9.16)$$

直线（*）和平面（**）平行的条件为：

$$Am+Bn+Cp=0, \qquad (9.17)$$

而它们互相垂直的条件为：

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}。 \qquad (9.18)$$

直线（*）在平面（**）上的条件为：

$$\begin{cases} Aa+Bb+Cc+D=0, \\ Am+Bn+Cp=0。 \end{cases} \qquad (9.19)$$

通过已知直线

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

的平面束的方程形式为：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (9.20)$$

这里，λ为任意实数。

48. 计算直线$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{2}$与平面$x+2y-3z+4=0$之间的夹角。

解：利用公式（9.16）。由于$A=1$，$B=2$，$C=-3$，$m=3$，$n=4$，$p=2$，那么

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot 3+2\cdot 4+(-3)\cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+2^2}}$$

$$=0.2482;$$

$$\varphi=14°22'。$$

49. 计算直线$\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{4}$与平面$2x-3y-2z+5=0$之间的夹角。

50. 已知一个平面通过点$M(-1,2,-3)$且与直线$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{2}$互相垂直，求这个平面的方程。

解：显然，所求平面的法向量n可以取与它平行的已知直线的方向向量$a=(4,3,2)$。利用通过已知点M且垂直于向量a的平面的方程，那么有

$$4(x+1)+3(y-2)+2(z+3)=0，或$$
$$4x+3y+2z+4=0。$$

51. 求通过点$M(2,-1,-4)$且垂直于直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+5}{3}$的平面的方程。

52. 通过已知点$M(1, 3, 2)$作平面$x-2y+2z-3=0$的垂线，试计算这条直线的方向余弦。

解：由于所求直线的方向向量平行于已知平面的法向量$n=(1, -2, 2)$。又知直线通过点$M(1, 3, 2)$和这条直线的方向向量，我们可写出它的典型方程：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{2}。$$

直线的方向余弦可按公式（9.12）求得：

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\pm\frac{1}{3},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma=\pm\frac{2}{3}。$$

53. 通过点$(1, 2, 4)$作平面$2x+3y+z-4=0$的垂直，试计算这条直线的方向余弦。

54. 求通过点$M(-1, 1, 2)$且垂直于平面$4x-5y-z-3=0$的直线的方程。

55. 求直线$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}$与平面$x+2y-3z-4=0$的交点。

解：我们先写出直线方程的参数形式。设$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}=t$，那么$x=2+4t$，$y=3+2t$，$z=-1+5t$。将求得的$x$，$y$，$z$的值代入平面方程，我们有：

$$2+4t+2(3+2t)-3(-1+5t)-4=0,$$

由此得 $t=1$。再将$t=1$ 的值代入直线的参数方程，我们得到 $x=6$，$y=5$，$z=4$。于是，（6，5，4）为所求的直线与平面的交点。

56．求直线$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+5}{2}$与平面 $2x+3y+z-22=0$ 的交点。

57．求通过点（-2，2，-4）且垂直于平面 $x-3y+2z-26=0$ 的直线的方程，并求出垂足的坐标。

58．判定直线$\frac{x-2}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-1}{-2}$是否平行于平面 $5x-2y+7z+3=0$。

解：利用直线与平面平行的条件（9.17），我们得到 $5\cdot4+(-2)\cdot3+7\cdot(-2)=0$，即直线与平面平行。

59．检验直线$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+1}{3}$是否平行于平面 $3x-5y-3z-4=0$。

60．验证：直线$\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$在平面 $2x-y-2z-9=0$ 上。

解：利用条件（9.19），当$a=3$，$b=1$，$c=2$，$m=4$，$n=2$，$p=3$，$A=2$，$B=-1$，$C=-2$，$D=-9$时，我们求得：

$$2\cdot3+(-1)\cdot1+(-2)\cdot(-2)-9=0;$$

$$2\cdot4+(-1)\cdot2+(-2)\cdot3=0。$$

因此，直线在平面上。

61．验证：直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{5}$ 在平面

$3x-4y-2z-7=0$ 上。

62．求通过直线$\begin{cases}2x+y-3z+4=0,\\x-y+z+3=0\end{cases}$ 和点$M(2, 1, -1)$的平面的方程。

解：利用等式（9.20），我们可写出通过已知直线的平面束的方程：

$$2x+y-3z+4+\lambda(x-y+z+3)=0。\qquad (*)$$

由于点M的坐标应当满足平面方程，那么将$x=2$，$y=1$，$z=-1$代入关系式（*）中，我们有

$$2\cdot2+1-3\cdot(-1)+4+\lambda(2-1-1+3)=0,$$

或 $12+3\lambda=0$。

由此得$\lambda=-4$。再将求得的值代入关系式（*）中，我们得到

$$2x-5y+7z+8=0。$$

63．求通过直线$\begin{cases}2x-4y+5z+5=0,\\2x-y+2z-1=0\end{cases}$ 和点$M(3, 2, 1)$的平面的方程。

§4．综　合　题

64．求通过点$M(-2, 2, -3)$且平行于向量$\boldsymbol{q}=(2, -4, 5)$的直线的典型方程和参数方程。

65．已知一条直线通过点$M(1, 2, 3)$，它的方向向量与OX轴，OY轴，OZ轴分别组成角，$\alpha=\frac{2\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，$\gamma=\frac{\pi}{4}$。试建立这条直线的典型方程和参数方程。

66. 求直线$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$和$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$之间的夹角。

67. 求通过 OZ 轴和点 $A(1，-2，1)$ 的平面的方程。

68. 如果点 $M(2，-1，2)$ 是由坐标原点向某个平面所作垂线的垂足，求这个平面的方程。

69. 求点$M(5，2，-1)$在平面$2x-y+3z+23=0$上的射影。

70. 求直线$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3}$和平面$6x-3y-2z=0$之间的夹角。

71. 求直线$\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$和平面$3x+5y-z-2=0$的交点。

小 测 验

第一组

1) 求通过点 $A(2，-3，4)$且平行于向量 $q=(-1，4，-2)$ 的直线的典型方程和参数方程。

2) 已知平面通过两点$A(1，2，1)$和$B(0，3，4)$，且垂直于平面$x+2y-z=0$，求这个平面的方程。

第二组

1) 求通过点$A(1，3，-5)$和$B(4，-1，2)$的直线的典型方程和参数方程。

2) 已知平面通过点 $M(-2，1，2)$且平行于两个向量$a=-i+2j-3k$和$b=5i-j+k$，求这个平面的方程。

3） 求直线$\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{-1}$和平面$2x+y+z+5=0$之间的夹角。

3） 求直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-2}$和平面$2x-y+3z-1=0$的交点。

第十章　多面体及其表面积

§1. 棱　　柱

1．三棱柱，四棱柱和六棱柱各有多少个面，顶点，棱和侧棱？

2．三棱柱，四棱柱，六棱柱和 n 棱柱各有多少个平面角，二面角和三面角？

3．三棱柱，四棱柱，六棱柱和 n 棱柱各有多少条对角线？

4．1）在三棱柱，四棱柱，六棱柱和n棱柱中，通过一条侧棱可作多少个对角面？

2）在四棱柱，六棱柱和n棱柱中，通过所有的侧棱可作多少个对角面？

5．三棱柱，四棱柱，六棱柱和 n 棱柱的所有的面角的和各等于多少？

6．证明：垂直于棱柱侧棱的截面，和每个侧面都垂直。

7．证明：棱柱的棱数能被 3 整除。

8．已知：直三棱柱，直四柱，直六棱柱，直 n 棱柱，它们的二面角的和各等于多少？

9．证明：棱柱的所有侧棱对底面的倾角都相等。

10．证明：在斜三棱柱中，由侧棱到它所对的侧面的距

离等于棱柱的垂直截面三角形的高。

11．在正六棱柱中，底边等于 m，侧面为正方形。求棱柱的对角线长及对角面的面积。

12．在正三棱柱中，每条棱都等于 a。通过一条底边和对称轴的中点作平面，求截面的面积。

13．在正四棱柱中，底的对角线等于 m，侧面的对角线等于n，求棱柱的对角线长。

14．已知正四棱柱的底边等于a，高等于h。求从底边到棱柱的与它不相交的对角线的最短距离。

解：直线 AB 和DB_1是异面直线。这两条直线在与其中一条直线垂直的平面上的正投影是一条直线和一个点。这条直线和这个点之间的距离就是这两条异面直线之间的距离（图101）。

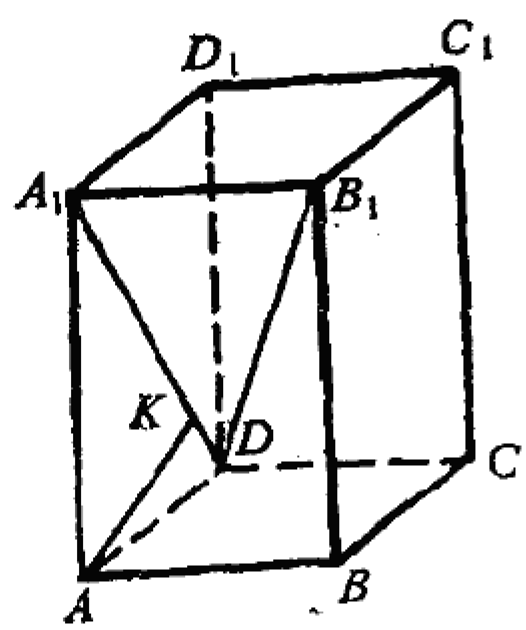


图 101

将直线 AB 和DB_1投影到侧面AA_1D_1D上，我们可得点A 和线段A_1D。

AB和DB_1之间的距离等于由点A到 A_1D 的距离，即直角三角形AA_1D的高AK：

$$|AK| = \frac{|AD| \cdot |AA_1|}{|A_1D|} = \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}。$$

15．在正四棱柱中，对角线对侧面的倾角为 30°，求它对底面的倾角。

16．在正三棱柱中，底边等于 12cm，侧棱等于 $10\sqrt{3}$ cm。求通过侧棱且垂直于它所对侧面的截面的面积。

17．在直三棱柱中，底边等于13cm，20cm，21cm，棱

柱的高等于 25cm。求通过侧棱和底面上较短的高的截面之面积。

18. 直棱柱的底面为菱形，它的对角线和高分别等于 8 cm，5cm和2cm。求棱柱的底边长。

19. 已知长方体各边的长度为：1）12，16，21；2）2，4，6。求长方体对角线的长。

20. 已知直平行六面体的每条棱都等于 a，底面上的锐角等于60°。求这个六面体的对角线长。

21. 证明：在一切平行六面体中，对角线的平方和等于各棱的平方和。

22. 若直平行六面体的所有对角线都相等，求证这个平行六面体是长方体。

23. 求立方体的棱a和它的对角线d之间的关系。

24. 求立方体的对角线d和它的侧面的对角线d_1之间的关系。

25. 求立方体的对角线和它的底面之间的夹角。

26. 求立方体的对角线所夹的锐角。

27. 如果立方体的棱长等于 10cm，那么要制造这样的立方体框架和它的所有的对角线，需要用多长的金属丝？

28. 立方体的棱等于 a。求由对角线到与它不相交的棱间的最短距离。

29. 求由立方体的顶点到它的对角线的距离。

30. 如果长方体的侧面的对角线分别等于11，19和20，求这个长方体的对角线。

31. 如果长方体的对角线与底面组成的角为45°和60°，底边的长等于17cm和31cm。求这个长方体的对角线。

32. 已知长方体的底边等于a和 b，高等于 h。求这个长

方体的对角面的面积。

33．平行六面体的各面均为边长等于a，而夹角等于60°的全等的菱形。求它的对角面的面积。

34．如果用一个平面将立方体断开，那么其截面形状能否为：1）不等边三角形；2）等腰三角形；3）等边三角形；4）直角三角形。

35．已知立方体的棱等于a，求它的对角面的面积。

36．已知立方体的截面通过由一个顶点引出的三条棱的端点。如果立方体的棱长等于a，求截面的面积。

37．已知立方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，过三条棱A_1B_1，A_1D_1和CD的中点作截面。证明：所得的截面为正六边形。若立方体的棱长等于a，求截面的面积。

38．已知立方体的棱长等于a，求过立方体对角线的中点且与对角线垂直的截面的面积。

39．已知立方体的棱长等于a，过由一个顶点引出的三条棱的端点作截面，求截面的周长和面积。

40．斜三棱柱侧棱间的距离等于20cm，34cm和42cm，求较大的侧面与它所对的侧棱间的距离。

41．斜平行六面体的底为菱形$ABCD$，其中$\angle BAD=60°$，侧棱对底面的倾角为60°，且平面AA_1C_1C垂直于底面。求证：截面BB_1D_1D和AA_1C_1C的面积比为2∶3。

42．已知斜平行六面体的底是边长为a的正方形，其中一个底的某个顶点在另一个底上的射影为正方形的中心。平行六面体的高等于H。求侧棱对底面的倾角。

43．已知斜平行六面体的底为菱形，一条侧棱与相邻的两条底边组成等角。求证：平行六面体在这条棱上的顶点投影到底面上的点恰在底的对角线上。

§2. 棱柱的表面积

棱柱的侧面积等于棱柱的垂直截面的周长与它的侧棱长的乘积：

$$S_{棱柱侧面} = Pl。 \quad (10.1)$$

44. 立方体的表面积等于S，求它的棱长。

45. 求立方体的表面积：

1）立方体的对角线为l；

2）立方体的对角面为Q。

46. 两个立方体的全面积等于 S 和Q。这两个立方体的棱长的比是多少？

47. 已知长方体的高等于 h，底的面积为 S，对角面的面积为Q。求长方体的侧面积。

48. 已知长方体各棱长的比为 3∶6∶22，对角线长等于23cm，求长方体的全面积。

49. 证明：侧面积等于全面积的$\frac{2}{3}$的长方体是正方体。

50. 已知长方体三个邻面的对角线分别等于 a，b 和c，求它的全面积。

51. 已知长方体的底边等于 6 cm 和 8 cm，对角面的面积等于180cm²，求长方体的全面积。

52. 已知长方体的侧棱等于 12cm，对角面的面积为312 cm²，底的面积为240cm²，求底边的长。

53. 已知直平行六面体的底边等于 3cm和 8cm，它们的夹角为60°，且六面体的较长的对角线等于 49cm，求直平行六面体的侧面积。

54. 已知直平行六面体的底为对角线等于12cm和16cm的菱形，侧面的对角线等于26cm，求直平行六面体的全面积。

55. 已知直平行六面体的对角线与底面组成的角为30°和45°，底边长等于6 cm和8 cm。求直平行六面体的侧面积。

56. 已知直平行六面体的底边长等于5cm和$2\sqrt{2}$ cm，它们的夹角为45°，直平行六面体的较短的对角线等于7cm，求它的全面积。

57. 根据底边a和侧棱l计算下列棱柱的全面积：1）三棱柱；2）四棱柱；3）六棱柱。

58. 已知正六棱柱的最长的对角线等于13cm，侧面积等于180cm²，求棱柱的全面积。

59. 已知正四棱柱的对角线长为l且对角线与侧面组成α角，求棱柱的侧面积。

60. 已知正六棱柱的对角线长为17cm和15cm，求棱柱的侧面积。

61. 已知正六棱柱最大截面的面积等于S，求棱柱的侧面积。

62. 已知直棱柱的底为梯形$ABCD$。梯形的两条平行边BC和AD等于26cm和40cm，两条不平行的边AB和CD等于15cm和13cm，截面AA_1C_1C的面积等于370cm²，求棱柱的侧面积。

63. 已知直棱柱的底为菱形。棱柱的对角线等于10cm和$6\sqrt{2}$ cm，高等于6cm。求棱柱的侧面积。

64. 已知直三棱柱的底面三角形的三边之比为17∶15∶8，侧棱等于20cm，全面积等于2080cm²。求这个棱柱的表面

积。

65. 已知直棱柱的底为等腰梯形，梯形的腰等于26cm，两底等于22cm和 42cm，棱柱的对角面的面积为 400cm^2，求棱柱的全面积。

66. 已知直三棱柱的底面三边分别等于34cm，50cm和52cm，通过侧棱与底面上的较短高的截面的面积等于480cm^2，求棱柱的侧面积。

67. 已知斜棱柱的底面是边长为 a 的正三角形，侧棱长等于b，一条侧棱与相邻的两条底边组成45°角。求棱柱的侧面积。

68. 已知斜三棱柱的各侧棱间的距离等于10cm，10cm和12cm，侧棱长等于 c，且侧棱与相邻底边组成 60° 角。求棱柱的侧面积。

69. 已知斜平行六面体的底是边长为a和b的矩形，侧棱长等于c，且侧棱与底边组成60°角。求平行六面体的侧面积。

§3. 棱　　锥

70. 按底边a和侧棱b求下列棱锥的高：1）正三棱锥，2）正四棱锥；3）正六棱锥。

71. 按底边a和高h求下列棱锥的斜高：1）正三棱锥；2）正四棱锥；3）正六棱锥。

72. 按底边a和高h求下列棱锥的侧棱：1）正三棱锥，2）正四棱锥；3）正六棱锥 。

73. 证明：正三棱锥（四面体）不相交的棱互相垂直。

74. 已知正六棱锥的侧面与底面组成的二面角等于60°，底边长等于a，求棱锥的高和边心距。

75．已知正三棱锥的侧棱等于m且与底面组成α角，求棱锥底边的长。

76．已知正四棱锥的高等于h，侧面与底面组成的角为α，求棱锥的侧棱长。

77．已知正四棱锥的高与侧棱间的夹角为α，底面边长等于a，求棱锥的侧棱长。

78．已知正三棱锥的高与侧棱间的夹角为α，底面边长等于a，求棱锥的高。

79．已知正四棱锥的侧棱等于m，侧棱与底面组成α角。通过两条相邻底边的中点及高的中点作平面。求所得的截面的面积。

80．在正三棱锥$S-ABC$中，侧棱等于m且它对底面的倾角为α。过两条棱AB和BC的中点作平行于棱SB的平面。求所得截面的面积。

81．已知正四棱锥的底边等于a，侧棱与底面组成的角为α，求棱锥的对角面的面积。

82．已知正四棱锥的底边等于a，侧棱对底面的倾角为α，过底的对角线作平行于侧棱的截面。求截面的面积。

83．已知正三棱锥的底面与侧面组成的二面角为φ，求棱锥各侧面在顶点处的平面角。

84．已知正三棱锥的底面边长等于9cm，侧棱长等于18cm。过两条相邻侧棱的中点作垂直于底面的截面。求截面的面积。

85．证明：如果棱锥的侧棱（或侧棱对底面的倾角）都相等，那么棱锥顶点在底面上的射影是底面多边形外接圆的圆心。

86．证明：通过正棱锥的高和斜高的平面垂直于侧面、

87．证明：如果正三棱锥的高等于底边，那么侧棱与底面成60°角。

88．已知棱锥的底面是边长为12cm和16cm的矩形，且每条侧棱都等于26cm。求棱锥的高。

89．已知棱锥的底面是边长为20cm，21cm和29cm的三角形，侧棱对底面的倾角为45°。求棱锥的高。

90．已知棱锥的底面为直角三角形。且过底面一条直角边的侧面和过底面斜边的侧面都垂直于底面。求证：这个棱锥的所有侧面都是直角三角形。

91．已知棱锥的底面是边长为3cm和7cm，一条对角线为6cm的平行四边形；棱锥的高等于4cm，且通过底面对角线的交点。求棱锥的侧棱。

92．已知：棱锥的底面是边长和一条对角线长都等于4cm的菱形。棱锥的高等于底面的长对角线且过菱形的锐角顶点。求过底面的短对角线且垂直于棱锥的长侧棱的截面的面积。

93．已知四棱锥底面的三个依次排列的角的比为2:3:4，棱锥的侧棱与底面组成相等的角。求四棱锥底面四边形的平面角。

94．已知棱锥的底面是底边为12cm，腰为10cm的等腰三角形。棱锥的侧面与底面组成含45°角的相等的二面角。求这个棱锥的高。

95．过棱锥的高的中点作平行于底面的截面。如果底面积等于S，求截面的面积。

96．在棱锥中，如果平行于底面的截面的面积等于：1）底面积的$\frac{1}{2}$；2）底面积的$\frac{1}{4}$；3）底面积的$\frac{m}{n}$。那

么截面将高分成两段的比怎样？

97．将棱锥的高分成四等分，过各分点作平行于底面的平面。已知棱锥的底面积等于$100cm^2$，求各截面的面积。

98．棱锥的高等于 36cm，底面积等于 $400cm^2$。如果一个平行于底的截面的面积为$100cm^2$，那么由底面到截面的距离是多少？

99．已知棱锥的截面平行于底面且将高分成2∶5两部分（由棱锥顶点开始计算），截面的面积比棱锥的底面积小$189cm^2$。求截面的面积。

100．已知正棱台的下底面和上底面的边长分别等于a和b，而侧棱等于c，求下列棱台的高：1）正三棱台；2）正四棱台；3）正六棱台。

101．在n棱台中可作多少条对角线？

102 已知正四棱台的下底面和上底面的边长分别等于a和b，侧棱与底边组成60°角。求棱台的高。

103 已知正四棱台的两底面的边长分别等于10dm和2dm，高等于2dm。求棱台的侧棱。

104．已知正四棱台的高等于36cm，斜高等于45cm，而两底面的边长的比为1∶4。求两底面的边长。

105．已知正四棱台的高等于7cm，而两底面的边长分别为3cm和5cm。求棱台对角线的长。

106．证明：如果B_1和B_2是棱台的底面积，M是棱台的中截面面积，那么$\sqrt{M}=0.5(\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2})$。

107．已知正六棱台的两底面的边长分别等于4cm和2cm，侧面与底面组成的二面角等于60°。过大底面的一条边及它在另一底面上的对边作截面。求截面的面积。

§4. 棱锥的表面积

正棱锥的侧面积等于棱锥底面的周长与斜高的乘积的一半：

$$S_{棱锥侧面积} = \frac{1}{2}Ph_{斜} \qquad (10.2)$$

正棱台的侧面积等于两底面周长之和的一半与斜高的乘积：

$$S_{棱台侧面积} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h_{斜}。 \qquad (10.3)$$

108. 按底边a和高h计算下列棱锥的全面积：1）正三棱锥；2）正四棱锥；3）正六棱锥。

109. 如果正三棱锥的高等于9cm，而斜高等于18cm，求这个棱锥的侧面积。

110. 已知正四棱锥的侧面积等于240cm^2，而全面积等于384cm^2，求棱锥底边的长和棱锥的高。

111. 已知正三棱锥的底面边长等于a，而侧棱与底面组成的角为30°，求棱锥的全面积。

112. 已知正四棱锥的对角面的面积与底面积相等，底面的边长等于a。求正四棱锥的侧面积。

113. 根据正四棱锥的高h和侧面积M来计算正四棱锥的底边长。

114. 已知正四棱锥的底面的边长等于2dm，两个侧面组成的二面角等于120°，求棱锥的侧面积。

115. 已知正四棱锥的底面积和对角面的面积都等于S平方单位，求棱锥的侧面积。

116．立方体的上底的中心和下底各边的中点是内接棱锥的顶点。如果立方体的棱长等于a，计算棱锥的侧面积。

117．如果正六棱锥的底边为a，高为h，求这个棱锥的全面积。

118．已知侧棱b和高h，求正三棱锥的侧面积。

119．已知正六棱锥的斜高等于R，底面的边心距等于r，求棱锥的全面积。

120．棱锥的底面是边长为16cm的正方形，它有两个侧面垂直于底面。如果棱锥的高等于12cm，求它的全面积。

121．已知棱锥的底面为直角三角形，它的两条直角边分别为3cm和4cm。棱锥各侧面对底面的倾角都等于60°。求棱锥的全面积。

122．已知棱锥的底面是对角线为6m和8m的菱形，棱锥的高等于1m。如果各侧面与底面组成的二面角都相等，求这个棱锥的全面积。

123．棱锥的底面是边长分别为6cm，10cm和14cm的三角形。棱锥的各侧面对底面的倾角都等于60°。求这个棱锥的全面积。

124．已知正棱台的下底面和上底面的边长分别为a和b，高为h。求下列正棱台的侧面积：1）三棱台；2）四棱台；3）六棱台；4）n棱台。

125．已知正四棱台的两个底面的边长分别为24cm和8cm，高为15cm。求棱台的全面积。

§5．综　合　题

126．已知长方体的两个底面的边长之比为7：24，对角

面的面积为30cm²。求长方体的侧面积。

127. 已知直三棱柱的底面的边长等于10cm，17cm和21cm。过一条侧棱和底面上较短的高作截面，其面积为72cm²。求棱柱的侧面积。

128. 已知直六面体的底面的边长为17cm和28cm，底面的一条对角线为25cm，两个对角面的面积之和与底面的面积之比为16∶15。求对角面的面积。

129. 已知直三棱柱的底面的边长之比为9∶10∶17，侧棱长为16cm，全面积等于1440cm²。求这个棱柱的侧面积。

130. 已知直棱柱的底面是边长为a，夹角为60°的菱形。过一个底面的长对角线与另一底面的钝角的顶点作截面，其截面为直角三角形。求棱柱的全面积。

131. 已知直棱柱的底面是底边分别为11cm和21cm，腰为13cm的等腰梯形。棱柱的对角面的面积为180cm²。求这个棱柱的全面积。

132. 已知直三棱柱的底面的边长之比为3∶4∶5，侧棱长为10cm，棱柱的全面积等于504cm²。求这个棱柱的侧面积。

133. 已知直棱柱的底面是等腰梯形。对角面和两个平行侧面的面积分别为320cm²，176cm²和336cm²。求棱柱的全面积。

134. 直三棱柱的底面的边长之比为17∶15∶8，侧棱等于16cm。如果这个棱柱的全面积为1760cm²，求底面的边长。

135. 已知棱柱的底面是外接圆半径为r的正三角形，棱柱的侧面是正方形。求棱柱的全面积。

136. 已知棱柱的底面是边长为6cm的正三角形，棱柱的侧棱长为5cm。上底面的一个顶点的射影恰为下底面的中心。

求棱柱的侧面积。

137．已知平行六面体的底面是边长为a的正方形，它的高也等于a。一条侧棱在下底面上的射影与对角线的一半重合。求这个平行六面体的侧面积。

138．证明：对角面垂直于底面的四棱柱是直棱柱。

139．证明：如果四棱锥的各棱都相等，那么这个棱锥是正棱柱。

140．已知棱锥的底面是直角三角形，且棱锥的侧棱都相等。求证：过底面斜边的侧面垂直于棱锥的底面。

141．已知棱锥的底面是等腰梯形，棱锥的各侧面对底面的倾角都相等。求证：梯形的腰等于它的中位线。

142．已知棱锥的底面是边长为a的正方形。具有公共棱的两个侧面垂直于底面。而另两个侧面对底面的倾角都是$60°$。求棱锥的全面积。

小 测 验

第一组

1） 已知平行六面体的底面是边长为3cm和5cm，夹角为$60°$的平行四边形，较大的对角面的面积为$63cm^2$。求平行六面体的全面积。

2） 已知正四棱台的两个底面的面积分别为$25cm^2$和$9cm^2$，侧棱与下底面成$45°$角。求棱台的侧面积。

第二组

1） 已知直棱柱的底面是底边为11cm和21cm，腰为13cm的等腰梯形。棱柱的对角面的面积为$180cm^2$。求棱柱的全面积。

2） 已知棱锥的底面是边长分别为6cm，10cm和14cm的三角形。各侧面与底面组成的二面角都等于$30°$。求棱锥的侧面积。

第十一章 旋 转 体

§1. 圆 柱

1. 已知圆柱体的底面半径为 3 cm，高为 8 cm。求轴截面的对角线长及这条对角线对底面的倾角。

2. 已知圆柱体的轴截面的对角线为 26cm，圆柱体的高为 24cm。求圆柱体的底面积。

3. 已知圆柱体的底面半径为 13cm，高为 20cm。求离轴 5 cm 且平行于轴的截面的面积。

4. 已知圆柱体的截面平行于轴，且将底面圆周截去60°弧。圆柱体的高等于 15cm，截面到圆柱体的轴的距离等于 3 cm。求这个截面的面积。

5. 等轴圆柱（轴截面为正方形）的轴截面的对角线等于 a，求这个圆柱体的内接六棱柱的全面积。

6. 圆柱体的底面面积与轴截面面积之比为 $\pi:2$。求轴截面的对角线所夹的锐角。

7. 已知等腰三角的底边等于 12cm，高等于 4 cm，它的三个顶点都在一个圆柱体的表面上。圆柱体的轴垂直于三角形的底边且与三角形所在平面成 30° 角。求圆柱体表面的半径。

8. 已知边长为 1 的正方形的各顶点在一个圆柱体的表面上，圆柱的轴垂直于正方形的一条边且与正方形平面组成

α 角，求圆柱体表面的半径。

9．已知轴截面为正方形且半径为 r 的圆柱体内切于一个正三棱柱，求这个棱柱的侧面积。

10．已知直棱柱的底面是一个直角边为 6 cm 和 8 cm 的直角三角形，侧棱长为 10cm，求棱柱的内切和外接圆柱体的轴截面的面积。

11．已知正三棱柱的侧棱等于a，侧棱中点同底面中心的连结线与底面组成 α 角。求棱柱的内切圆柱体的轴截面的面积。

§2．圆锥、圆台

12．已知圆锥的底面半径为 5 cm，它的高为12cm。求圆锥的轴截面的面积，母线长和母线对底面的倾角。

13．已知圆锥的轴截面的面积等于 48cm^2，它的母线与底面成 α 角。求圆锥的底面积。

14．已知圆锥的底面半径为 6 cm，它的高为 12cm。求平行于圆锥的轴且距轴 2 cm 的截面的面积。

15．已知圆锥的截面平行于轴且截得底面圆周的弧为 120°。圆锥的高等于 12cm，截面距轴 3 cm。求截面的面积。

16．已知圆锥的底面半径为 R。求平行于圆锥的底面且将高分为 $m:n$（由顶点到底面）的截面的面积。

17．已知等边圆锥（轴截面是等边三角形）的底面半径等于 R，两条母线间的夹角等于 60°。求过这两条母线所作的截面的面积。

18．圆锥的高等于H，高和母线间的夹角等于 30°。如

果两条母线间的夹角为 60°，求过这两条母线的截面的面积。

19. 圆锥的底面半径等于 R，高等于H。如果两条母线在底面圆周上截得的弧为 90°，求过这两条母线的截面的面积。

20. 过圆锥顶点的截面对底面的倾角为 60° 且在底面圆周上截得的弧为 90°。如果圆锥的高等于H，求这个截面的面积。

21. 已知圆锥的底面半径 R和高H。求它的内接立方体的棱长。

22. 已知圆锥的底面半径为 R，高为H。求内接于圆锥的且侧面为正方形的正三棱柱的棱长。

23. 根据圆锥的轴截面的顶角是直角，锐角或钝角来证明圆锥的高是等于，大于或小于底面的半径。

24. 已知正三棱锥的底面边长等于 a，底面与侧面组成的二面角等于 α。求它的内接圆锥的轴截面的面积。

25. 将高为H且底面半径为 R的圆锥的侧面展开成平面，求得到的扇形的中心角。

26. 已知圆锥的母线等于 L，底面半径等于 R。求圆锥侧面展开图的中心角 α（研究等边圆锥的特殊情形）。

27. 将半圆卷成圆锥的表面。求圆锥母线与它的高之间的夹角。

28. 将半径等于 L，而中心角等于 α 的扇形卷成一个圆锥的表面。求圆锥的底面半径。

29. 已知圆台的底面半径分别为 R和 r，高等于H。求圆台的母线长。

30. 已知圆台的底面半径分别为 R和 r，母线对底面的

倾角为 α。求圆台的高。

31．已知圆台的底面半径分别为 18cm 和 30cm ，母线为 20cm 。求由小底的中心到大底的圆周的距离。

32．已知圆台的底面半径分别为 R 和 r ，母线长为 l 。求圆台轴截面的面积。

33．已知圆台的底面积为 M_1 和 M_2。求平行于底面的中截面的面积。

34．已知圆台的底面积为 32cm² 和 2 cm² 。将圆台的高分成三等分，求过各分点且平行于底面的截面的面积。

35．已知圆台的底面半径分别等于 10cm 和 6 cm ，高等于 8 cm 。将圆台的高分成四等分，求过各分点且平行于底面的截面的面积。

§3． 球面、球体

中心在点 $O(a, b, c)$ 且半径为 R 的球面的方程为：

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2。$$

36．求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 同坐标轴的交点的坐标。

37．如果：1）$S(2, 3, 4)$，$R=5$；2）$S(-3, 0, 4)$，$R=\sqrt{2}$。求中心为 S 且半径为 R 的球面的面积。

38．已知四点：$A(-1, 3, 2)$，$B(0, 3, 1)$，$C(2, -2, 0)$，$D(-4, 2, 2)$。试问哪几个点在中心为 $S(-2, 1, 0)$ 而半径为 3 的球面上？

39．求下列各球的中心和半径：

1）$x^2+y^2+z^2=16$；

2）$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=36$；

3）$x^2-6x+y^2+8y+z^2-4z+4=0$；

4）$x^2+10x+y^2+2y+z^2+6z-1=0$。

40．已知球面过点 $A(-3, 4, -2)$，而它的中心在坐标原点。试建立球面的方程。

41．已知球面的中心为 $C(2, -1, 3)$ 且过坐标原点。求球面的方程。

42．已知点 $A(4, -2, 3)$ 在中心为 $C(2, -3, -1)$ 的球面上。试建立球面的方程。

43．已知球面 $x^2+y^2+z^2=450$。求过坐标原点及点 $A(4, 5, 3)$ 的直线与球面交点的坐标。

解：过坐标原点及点 $A(4, 5, 3)$ 的直线方程为：

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y-5}{5}=\frac{z-3}{3}。$$

我们将这个方程写成参数方程形式：

$$\frac{x-4}{4}=t; \quad \frac{y-5}{5}=t; \quad \frac{z-3}{3}=t。$$

由此得：

$$x=4+4t;\ y=5+5t;\ z=3+3t。 \qquad (*)$$

将x，y和z的值代入球面方程，得：

$$((4+4t)^2+(5+5t)^2+(3+3t)^2=450)$$

$$\Longleftrightarrow(t^2+2t-8=0)\Longleftrightarrow(t_1=-4,\ t_2=2)。$$

然后将求得的 t 值代入关系式（$*$）中，我们得到直线与球面的两个交点：$(-12, -15, -9)$ 和 $(12, 15, 9)$。

44．已知球面 $x^2+y^2+z^2=200$。求过坐标原点及点 $A(5, -3, 4)$ 的直线与球面的交点的坐标。

45．求点 $A(6, -3, -2)$ 到球面$x^2+y^2+z^2=9$

的距离。

解：我们先来求坐标原点至点 $A(6, -3, -2)$ 的距离：

$$|OA| = \sqrt{6^2+(-3)^2+(-2)^2} = 7。$$

由于球面半径等于 3，那么点 A 到球面的距离等于 $7-3=4$。

46．求点 $A(1, -2, 2)$ 至球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 的距离。

47．求点 $A(2, 4, 3)$ 至球面 $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$ 的距离。

48．已知球面半径等于 70cm。切平面上的一点到切点的距离为 24cm。求这点到球面的最短距离。

49．已知球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面相交。如果平面的方程为：1）$z=1$；2）$y=2$，求截面圆的中心 O 和半径 r。

50．球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面：1）$x=2$；2）$x-y=1$ 相交，能得到怎样的图形？

51．已知半径为 R 的球面与平面相交，球心到平面的距离为 a。求截面的面积。

52．已知球面半径为 R，求距离球心为 m 的截面与最大截面的面积之比。

53．已知球面半径为 R，过一条半径的端点作与它成角 α 的平面。求截面的面积。

54．已知球面上一点和一圆。这点到圆上所有的点的距离（按照直线）都等于 a。如果球面半径等于 R，求这个圆的半径。

§4. 球面的内切和外接

如果一个多面体的所有顶点都在一个球面上，那么这个多面体称为球的内接多面体。

如果一个多面体的所有面都和一个球面相切，那么这个球称为多面体的内切球。

如果球的两个截面恰是一个圆柱的两底，那么这个球称为圆柱的外接球。这时，圆柱称为球的内接圆柱。

如果一个圆柱的两底及所有的母线都相切于一个球，那么这个球称为圆柱的内切球。这时，圆柱称为球的外切圆柱。

圆柱可作内切球的条件是，圆柱是等边圆柱（圆柱的轴截面是正方形）。

如果球的一个截面是一个圆锥的底面，而圆锥的顶点在球面上，那么这个球称为圆锥的外接圆。这时，圆锥称为球的内接圆锥。

如果圆锥的底面和所有的母线都相切于一个球，那么这个球称为圆锥的内切球。这时，圆锥称为球的外切圆锥。在所有的圆锥中都可作内切球。

圆台可作内切球的条件是，圆台的母线长等于两底的半径之和。

55. 已知立方体的棱长等于 a，求它的内切球和外接球的半径。

56. 已知长方体的尺寸为 4 cm，6 cm 和 12cm。求它的外接球的半径长。

57. 已知正六棱柱的高等于 8 cm，而侧面对角线等于

13cm。求它的外接球的半径长。

58．已知半径为 R的球内切于一个正六棱柱。求棱柱的全面积。

59．已知正四棱锥的高等于 h，而侧棱等于 b。求它的外接球的半径长。

60．已知正四面体的棱长为 a，求它的外接球和内切球的半径长

61．已知正棱锥的侧棱等于 b，侧棱与底面成 α 角。求它的外接球的半径长。

62．已知侧棱与底面成 α角的正四棱锥内接于半径为 R 的球中，求这个棱锥的侧棱长。

63．已知正棱锥的高等于 h 且侧棱与底面组成的二面角为 α。求这个棱锥的内切球的半径。

64．已知正三棱锥的高等于 h，而侧棱互相垂直，求它的外接球的半径。

65．已知正三棱台的高等于 17cm，而两底的外接圆的半径等于 5 cm 和 12cm。求棱台的外接球的半径长。

66．已知正六棱台的底面边长分别为 3 cm 和 4 cm，高等于 7 cm。求棱台的外接球的半径长。

67．已知半径为 2 cm 和母线为 3 cm 的圆柱内接于一个球，计算这个球的半径。

68．已知底面半径为 5 cm 的等边圆柱内有一个内切球。试计算垂直于圆柱的轴且距离球心 3 cm 的截面的面积。

69．已知圆锥的高等于 h，而母线等于 l，求它的外接球的半径。

70．已知底面半径为 r 而母线为 l 的圆锥内有一个内切

球。试计算这个球面与圆锥侧面相切的全体切点形成的线的长。

71．已知圆锥的高等于 20cm，母线等于 25cm。圆锥内有一个内接半球，它的底面在圆锥的底面上。试计算半球的半径。

72．已知圆锥的母线长为 l，它与底面成 α角。试计算：1）圆锥的外接球的半径长；2）圆锥的内切球的半径长。

73．已知半径为 R的球内有一个高为 h 的内接圆锥，求圆锥的轴截面的面积。

74．已知圆锥的轴截面的面积等于 S，母线与底面成 α 角。求圆锥的内切球的半径。

75．已知半径为 R的球内切于一个圆台，圆台的母线与底面成 α角。求圆台的轴截面的面积。

76．已知圆台的底面半径等于3cm和4cm，高等于7cm。求圆台的外接球的半径。

77．已知圆台外切于一个球，圆台的底面半径分别为 R 和 r。试计算这个球的半径。

78．已知球面扇形的半径等于 R，它在轴截面上的弧等于 60°。试计算球面扇形的内切球的半径及内切球与球面扇形相切的切点形成的圆周长。

79．如果球面扇形的中心角等于 α，半径等于 R，求这个球面扇形的内切球的半径。

80．已知球缺的半径等于 r，它在轴截面上的弧等于 α。求它的内切球的半径。

81．已知半径分别为 10cm 和 30cm 的彼此相切的两个球，内切于一个球面扇形。求这个球面扇形的半径。

§5. 综 合 题

82. 已知平面平行于圆柱的轴且在底面圆周上截得120°弧。如果圆柱的轴长为 10cm ，而它距截面 2cm ，求截面的面积。

83. 已知立方体的棱等于 a ，它的对角线是一个圆柱面的轴。如果这个圆柱面相切于：1）立方体的棱；2）立方体侧面的对角线，求这个圆柱面的半径。

84. 已知圆柱的高等于15cm，它的底面半径等于10cm。一条长 $3\sqrt{41}$cm 的线段的端点在两底面的圆周上。求这条线段到圆柱轴的最短距离。

85. 已知圆锥的底面半径为 R，母线对底面的倾角为 α 。过圆锥的顶点作平面，使它与高的夹角为 φ。求得到的截面的面积。

86. 已知直棱柱的底面是锐角为 α的等腰梯形。一个圆锥的底面内切于棱柱的底面多边形，而它的顶点在棱柱的另一底面上。如果这个圆锥的底面半径等于 d，而母线对底面的倾角等于 φ，求棱柱的全面积。

87. 过圆锥的顶点作与高成 30° 角的截面。如果圆锥的高等于 $3\sqrt{3}$ cm ，而底面半径等于 5 cm ，求截面的面积。

88. 已知棱锥的底面是直角边为 80cm 和 60cm 的直角三角形。在这个棱锥内作一个内切圆锥。如果这个圆锥的高等于 20cm ，求圆锥的母线与底面间的夹角。

89. 已知圆台的轴截面的对角线互相垂直，高等于H。求过高的中点且平行于底面的截面的面积。

90．已知菱形的对角线等于 30cm和40cm。一个半径为13cm 的球与菱形各边都相切。试计算球心到菱形所在平面的距离。

91．已知球的半径等于 6 cm 。过一条半径的端点作与它成 30° 角的平面。试计算截面的面积。

92．已知半径为 10cm 的球上放着一个边长为 12.5cm 的菱形。菱形的每条边都与球相切。菱形平面距球心 8 cm。求菱形的面积。

93．已知两球的半径分别等于 16cm 和 20cm ，两个球心间的距离为 25cm 。求两个球面相交所得的圆的周长。

94．已知球缺的半径等于 r ，它在轴截面上的弧为 α。试计算：1）球缺的底面周长；2）球缺的高。

小 测 验

第一组

1）已知圆锥内有一个内接等边圆柱。如果圆锥的高等于H，轴截面的顶角等于 α，求圆柱的高。

2）已知直棱柱外切于球。直棱柱的底面是对角线为6cm和8cm的菱形。试计算棱柱的全面积。

第二组

1）已知圆柱的截面平行于高且为正方形。圆柱的轴到截面的距离为 d，截面在底面圆周上截得的弧为 α。求截面的面积。

2）已知球外接于高为3cm的棱台。棱台的一个底面是直角边为8cm和 16cm 的直角三角形，另一个底面的长为6cm。试计算球的半径。

第十二章　多面体和旋转体的体积

§1. 多面体的体积

直平行六面体的体积等于它的三边的乘积：

$$V_{\text{直平行六面体}} = abc。\tag{12.1}$$

棱柱的体积等于底面积与高的乘积：

$$V_{\text{棱柱}} = S_{\text{底}}H。\tag{12.2}$$

棱锥的体积等于底面积与高的乘积的三分之一：

$$V_{\text{棱锥}} = \frac{1}{3}S_{\text{底}}H。\tag{12.3}$$

棱台的体积按下面的公式计算：

$$V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)H，\tag{12.4}$$

这里S_1和S_2为棱台两底的面积，H为棱台的高。

1. 计算立方体的体积：

1）立方体的对角线为 l；

2）立方体的表面积为 S。

2. 如果立方体的对角面的面积等于M，试计算立方体的体积。

3. 已知一个立方体的体积等于棱长为 m和 n 的两个立方体的体积之和，求这个立方体的棱长。

4. 已知长方体的棱长为 6 cm，16cm 和 18cm，求和

它等积的立方体的棱长。

5. 已知长方体侧面的面积分别为 S_1，S_2 和 S_3，求它的体积。

6. 已知长方体棱长的比为2:7:26；长方体的对角线等于81cm 。求长方体的体积。

7. 已知长方体的侧面的对角线为7cm，8cm 和9cm，求长方体的体积。

8. 已知长方体的对角线等于 l，且对角线与一个侧面成 α角，而与另一个侧面成 β角。求长方体的体积。

9. 已知直平行六面体的底面为平行四边形。底面的边长为 8 cm 和 32cm，锐角 $\alpha = 60°$，且长对角线为40cm 。试计算直平行六面体的体积。

10. 已知直平行六面体的底面边长等于25cm 和 39cm，它的对角面的面积等于 $204cm^2$ 和 $336cm^2$。求直平行六面体的体积。

11. 已知直平行六面体的底面边长分别等于 17cm 和25 cm，底面的一条对角线等于26cm，六面体的短对角线与底面成 30° 角。试计算直平行六面体的体积。

12. 已知直平行六面体的底面是对角线之比为5:16的棱形，它的两条对角线长分别等于 26cm 和 40cm 。试计算直平行六面体的体积。

13. 已知直平行六面体的底面是边长为 a 和一个角为 α 的棱形，而它的侧面对角线与侧棱成 β角。试计算直平行六面体的体积。

14. 已知直平行六面体的底面是边长为 a 而锐角为 α的棱形。六面体的长对角线与底面成 β角。试计算直平行六面体的体积。

15. 试从给定全面积 S和底面为正方形的所有直平行六面体中求出其体积最大者。

解：设 x为直平行六面体的底面的边长，y 为它的高。那么它的全面积等于

$$S=2x^2+4xy,$$

由此得

$$y=\frac{S-2x^2}{4x}。$$

因此，直平行六面体的体积为：

$$V=x^2y=x^2\cdot\frac{S-2x^2}{4x}=\frac{1}{4}Sx-\frac{1}{2}x^3$$

$$\left(0<2x^2<S,\ 0<x<\sqrt{\frac{S}{2}}\right)。$$

我们借助二阶导数来研究函数的极值：

$$V'=\frac{1}{4}S-\frac{3}{2}x^2;$$

$$\frac{1}{4}S-\frac{3}{2}x^2=0,\ x=\sqrt{\frac{S}{6}}=\frac{\sqrt{6S}}{6};$$

$$V''=-3x;$$

$$V''_{x=\frac{\sqrt{6S}}{6}}<0。$$

二阶导数在 $x=\frac{\sqrt{6S}}{6}$时为负值。这就意味着，自变量取这个值时函数有极大值。我们求得：

$$y=\frac{S^2-\left(\frac{\sqrt{6S}}{6}\right)^2}{4\cdot\frac{\sqrt{6S}}{6}}=\frac{\sqrt{6S}}{6}。$$

即直平行六面体的高和底边相等。因而，在所有的满足已知条件的直平行六面体中，具有最大值的为正方体。

16．有一块边长为 80cm 和 50cm 的矩形铁皮。在四角上剪去相等的正方形，然后将铁皮弯成一个开口的箱子。当剪去的正方形的边长为多少时，做成的箱子有最大容积（图102）？

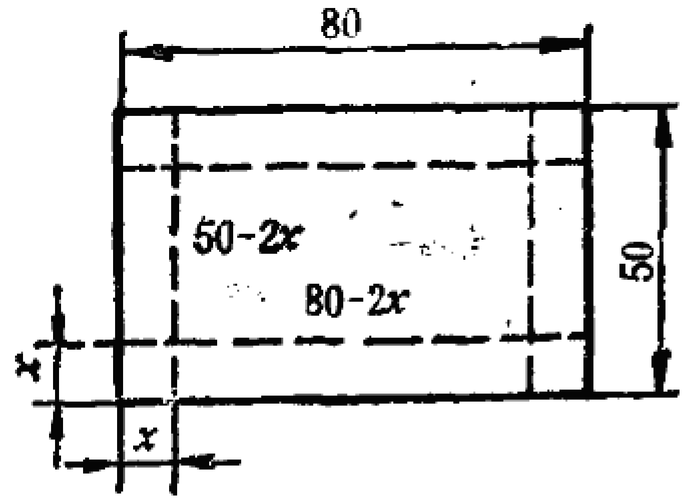


图 102

17．试从给定体积 V 而底面为正方形的所有的直平行六面体中求出其全面积最小者。

18．求出体积为 V 而底面为正方形的开口（无盖）箱子在其全面积最小时的形状。

19．如果开口箱子的底面为正方形，侧面的总面积和底面的面积都等于 S。试计算开口箱子在具有最大容积时的尺寸。

20．已知正棱柱的底面边长等于 a，侧棱等于 b。求下列棱柱的体积：1）正三棱柱；2）正四棱柱；3）正六棱柱。

21．已知正三棱柱的底面边长等于 a，侧面积与两底面的面积之和相等。求这个棱柱的体积。

22．已知直棱柱的底面是面积为 306cm² 的梯形。两个平行侧面的面积等于 40cm² 和 30cm²，而另外两个侧面的面

积为 $75cm^2$ 和 $205cm^2$。求棱柱的体积。

23．已知直四棱柱的底面积为M，对角面的面积为 P和 Q，而它们之间的二面角等于α。求棱柱的体积。

24．已知斜平行六面体的底面是边长为 4 cm 和 6 cm 的矩形。侧棱等于 2 cm 且与底面上的每一邻边都成60°角。求斜平行六面体的体积。

25．已知斜三棱柱的每条棱都等于 a。一条侧棱与底面上的每条邻边都成 α角。求棱柱的体积。

26．过斜平行六面体上的一个已知点作一个截面，使它将斜平行六面体分成两个等积的棱柱。

27．已知斜三棱柱的底面是高为 h 而底角为 φ的等腰三角形。三棱柱的侧棱等于 a，侧棱对底面的倾角为 β。求棱柱的体积。

28．已知斜平行六面体的底面是边长为 a 和 b 而其夹角为 φ的平行四边形。斜平行六面体的侧棱等于 l 且对底面的倾角为 α。求斜平行六面体的体积。

29．根据底面边长 a 和侧棱 b 计算下列棱锥的体积：1）正三棱锥；2）正四棱锥；3）正六棱锥。

30．已知正三棱锥的高等于 h，而斜高等于 k，求棱锥的体积。

31．已知正四棱锥的底面积和侧面积分别为 S和Q，求这个棱锥的体积。

32．求棱长为 a 的正四面体的体积。

33．已知一个正四面体各侧面的中心是另一个新正四面体的顶点，求它们体积的比。

34．已知正四棱锥的侧面积为 S，在顶点处的平面角为 α，求这个棱锥的体积。

35．已知正三棱锥的底面边长为 a，而侧面与底面成 α 角，求它的体积。

36．正四棱锥的高与侧面成 α角。如果侧面积等于 S，试计算棱锥的体积。

37．已知棱锥的底面是有一条直角边为 a 而与它相邻的锐角为 30° 的直角三角形。侧棱对底面的倾角为 60°。求棱锥的体积。

38．已知棱锥的底面是边长为 15cm 的菱形。棱锥的每个侧面对底面的倾角都是 45°。如果棱锥的侧面积等于 300cm²，求它的体积。

39．已知棱锥的底面为等腰梯形，这个梯形的两底为 3 cm 和 5 cm，腰为 7 cm。棱锥的高过底面对角线的交点，较长的侧棱为 10cm。求棱锥的体积。

40．已知棱锥的底面是面积为 1 m²的矩形，两个侧面垂直于底面，而另两个侧面对底面的倾角分别为α 和 β。求棱锥的体积。

41．已知棱锥的底面为矩形，每条侧棱都等于 a 且与相邻的边成 α角和 β角。求棱锥的体积。

42．已知棱锥的底面是边长为 a 而锐角为 α的菱形。棱锥的侧面与底面成 β角。求棱锥的体积。

43．根据侧棱 l 和两底面的边长 a 与 b 计算下列棱台的体积：1）正三棱台；2）正四棱台；3）正六棱台。

44．已知正棱台的底面边长等于 4 cm 和 8 cm，而对角线等于 11cm。求棱台的体积。

45．已知正六棱台的斜高等于 10cm，而高等于 8cm。两个底面的边长之和等于 $8\sqrt{3}$ cm。求棱台的体积。

46．已知正三棱台的底面边长等于 a 和 b（$a>b$），侧

棱与较大的底面成 α角。求棱台的体积。

47．已知正四棱台的两个底面的边长等于a和b($a>b$)，侧棱与较大的底面的边成 φ角。求棱台的体积。

48．已知棱台的一个底面的边长分别为 27cm，29cm 和 52cm，另一个底面的周长为 72cm，棱台的高为 10cm。求棱台的体积。

49．已知棱台的较大底面是直角边为 a 和 b 的直角三角形，每条侧棱对这个底面的倾角都是 α，较小底面的周长是较大底面的周长的 n 分之一。求这个棱台的体积。

§2． 旋转体的体积

圆柱的体积等于它的底面积与高的乘积：

$$V_{圆柱}=\pi R^2H。\tag{12.5}$$

圆锥的体积等于它的底面积与高的乘积的三分之一：

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi R^2H。\tag{12.6}$$

圆台的体积可按下式计算：

$$V_{圆台}=\frac{1}{3}(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)H。\tag{12.7}$$

这里，R_1 和 R_2为圆台的底面半径，H为圆台的高。

半径为 R的球体的体积按下式计算：

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3。\tag{12.8}$$

球面扇形的体积公式为：

$$V_{球面扇形}=\frac{2}{3}\pi R^2H。\tag{12.9}$$

这里，R 为球的半径，H为球面扇形的高。

球缺的体积公式为：

$$V_{球缺}=\frac{1}{3}\pi H^2(3R-H)。\qquad (12.10)$$

这里，R 为球的半径，H为球缺的高。

50．已知矩形的对角线与它的一边成 α角，求分别旋转矩形的两邻边所得的圆柱的体积之比。

51．已知圆柱的轴截面的对角线长为 d且对底面的倾角为 a。求圆柱的体积。

52．已知等边圆柱的轴截面的面积等于 S，求圆柱的体积。

53．如果将一个立方体旋成一个最大体积的圆柱体，那么将有百分之几的材料被旋掉？

54．已知圆锥的底面半径为R，高为H。试从这个圆锥的所有内接圆柱中求出具有最大体积的那个圆柱。

解：设 r 为所求的圆柱的底面半径，h 为它的高（图103）。由$\triangle ABO_1$和$\triangle ACC_1$相似，我们有：

$$\frac{R}{H}=\frac{R-r}{h}。$$

由此得：

$$h=H\cdot\frac{R-r}{h}。$$

将 h 的值代入圆柱的体积公式$V=\pi r^2h$，得

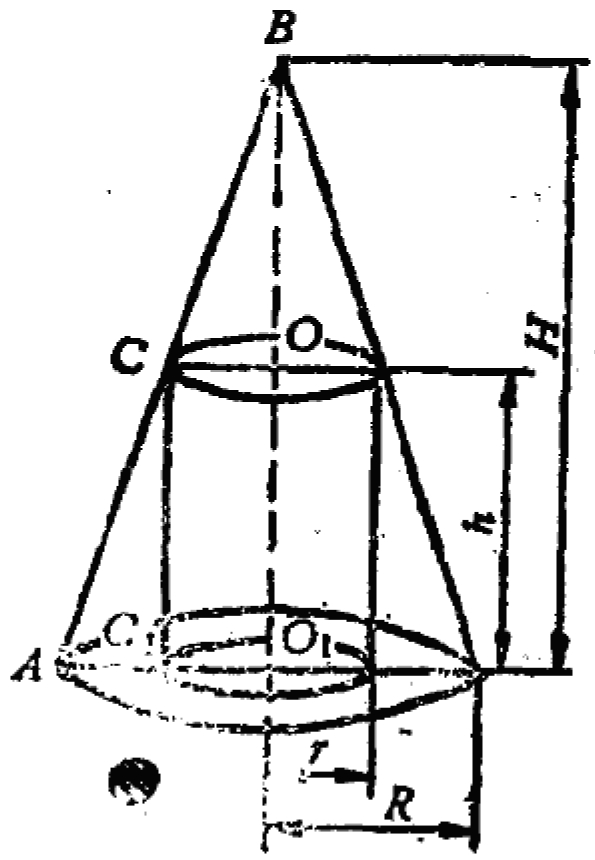


图 103

$$V=\pi r^2\cdot\frac{H(R-r)}{R}=\frac{\pi H}{R}(Rr^2-r^3);\ 0<r<R。$$

我们利用二阶导数来研究函数的极值：

$$V'=\frac{\pi H}{R}(2Rr-3r^2);\quad \frac{\pi H}{R}(2Rr-3r^2)=0;$$

$$2Rr-3r^2=0;\quad r(2R-3r)=0;\quad r_1=0,\ r^2=\frac{2}{3}R;$$

$$V''=\frac{\pi H}{R}(2R-6r);\quad V''_{r=\frac{2}{3}R}=-2\pi H。$$

二阶导数在 $r=\frac{2}{3}R$时为负值，因此函数在$r=\frac{2}{3}R$ 时有极值。

我们求出所求的圆柱的高：

$$h=\frac{H(R-\frac{2}{3}R)}{R}=\frac{1}{3}H。$$

于是，当圆柱的底面半径 $r=\frac{2R}{3}$而高 $h=\frac{H}{3}$时有最大体积。

55．试从半径为 R的球的所有内接圆柱中求出具有最大体积的那个圆柱。

56．用宽$a$cm 的条形铁皮做一个圆柱面形开口槽。当有怎样的中心角 α时槽的体积最大？

57．将一条直角边为 a 且与它相邻的锐角为 α的直角三角形环绕着斜边旋转一周。求这个旋转体的体积。

58． 已知圆锥的侧面展开图是半径为 R而中心角为 α的

扇形，求圆锥的体积。

59. 已知直角梯形的两底等于a和b（$b>a$）。求当梯形环绕着底边旋转时得到的两个旋转体的体积之比。

60. 已知菱形的边长为a，锐角为α。将这个菱形环绕着过锐角顶点而垂直于菱形一边的轴旋转。求这个旋转体的体积。

61. 已知圆锥内有一个半径为r的内切球，过切点的半径与圆锥的高成α角。求圆锥的体积。

62. 试从半径为R的球的所有内接圆锥中求出具有最大体积的那个圆锥。

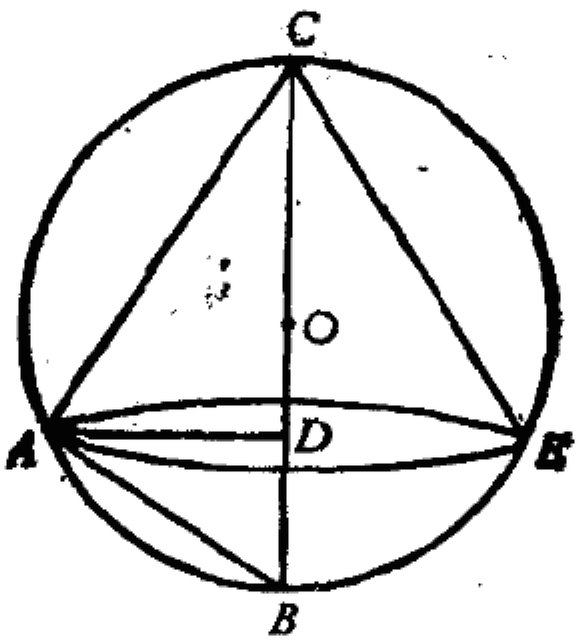


图 104

解：设$|AD|=r$为所求圆锥的底面半径，$|DC|=h$为所求圆锥的高（图 104）。在$\triangle ABC$中，根据射影定理，我们有$|AD|^2=|BD|\cdot|DC|$，或$r^2=(2R-h)h$。将r^2的值代入圆锥的体积公式$V=\frac{\pi r^2 h}{3}$，得

$$V=\frac{1}{3}\pi(2R-h)\cdot h\cdot h=\frac{1}{3}\pi(2Rh^2-h^3);\ 0<h<2R.$$

我们利用二阶导数来研究这个函数的极值：

$$V'=\frac{1}{3}\pi(4Rh-3h^2);\ \frac{1}{3}\pi(4Rh-3h^2)=0;$$

$$4Rh-3h^2=0;$$

$$h(4R-3h)=0;\ h_1=0;\ 4R-3h=0;\ h_2=\frac{4}{3}R;$$

$$V'' = \frac{1}{3}\pi(4R - 6h) = \frac{2}{3}\pi(2R - 3h);$$

$$V''_{h=\frac{4}{3}R} = \frac{2}{3}\pi(2R - 3\cdot\frac{4}{3}R) = \frac{2}{3}\pi(-2R)$$

$$= -\frac{4\pi R}{3}.$$

当 $h=\frac{4}{3}R$ 时，二阶导数为负值。因此当函数自变量取这个值时，函数有极值。

当 $h=\frac{4}{3}R$ 时，我们求出 r 的值：

$$r^2 = (2R - \frac{4}{3}R)\cdot\frac{4}{3}R = \frac{2R}{3}\cdot\frac{4}{3}R = \frac{8}{9}R^2,$$

即 $r = \frac{2\sqrt{2}R}{3}$。

于是，当底面半径为 $\frac{2\sqrt{2}R}{3}$ 而高为 $\frac{4R}{3}$ 时圆锥有最大体积。

63．试从母线为 l 的所有圆锥中求出其体积最大者。

64．从半径为 R 的圆纸片上剪去一个扇形，将其余部分粘成一个圆锥形漏斗。为了使漏斗的容积最大，那么剪去的扇形应该有怎样的中心角？试求出此时漏斗的底面半径和高。

65．已知圆台的底面半径为 R 和 r，母线与一个底面成 α 角。求圆台的体积。

66．已知圆台的底面半径为 27cm 和 11cm，母线与高

之比为 17:15 。求圆台的体积。

67．已知底面半径为 6 cm 和 9 cm 而高为 12cm 的圆台被平行于底面的两个平面所截，这两个平面将高分成三等分。求圆台的中间部分的体积。

68．已知等腰梯形的两底为11cm和21cm，腰为13cm。将梯形环绕着它的轴旋转，求这个旋转体的体积。

69．已知菱形的边长为 a ，锐角为 α。将这个菱形环绕着过锐角顶点且垂直于菱形一边的轴旋转。求这个旋转体的体积。

70．已知圆台两底的面积比为 4 ，母线长为 l 且与底面成 α角。求圆台的体积。

71．已知三个球的直径等于 6 cm ， 8 cm 和 10cm ，求与这三个球的体积之和等积的球的直径。

72．将立方体旋成一个最大体积的球。求被旋掉的材料的百分率。

73．求立方体的内切球和外接球的体积比。

74．如果圆柱和圆锥的底面直径及它们的高都等于球的直径。求圆柱，球和圆锥的体积之比。

75．已知空心球的外表面的半径等于 9 cm ，球壁的厚度为 3 cm 。求这个空心球的球壁的体积。

76．已知垂直于球的直径的平面将直径分成长度为 3cm 和 6 cm 的两部分，求这个球相应两部分的体积。

77．如果两个相等的球，其中一个的球心在另一个的球面上，那么它们的公共部分的体积与球的体积的比是多少？

78．已知球缺的底面半径等于 8 cm ，轴截面含有60°弧。计算球冠的体积。

79．已知球冠的底面半径等于 8 cm ，高等于 4 cm ，计

算球冠的体积。

80．已知球面扇形的轴截面的中心角为120°，球的半径为 R，计算球面扇形的体积。

81．已知球面扇形的底面圆周的半径等于 60cm，球的半径等于 75cm。计算球面扇形的体积。

82．已知球的半径为 R，球面扇形的轴截面上的弧为 α，计算球面扇形的体积。

83．已知球面扇形的轴截面上的弧为 α，它的高为 h。计算球面扇形的体积。

84．已知球的半径为 25cm，它的两个平行截面的半径为 20cm 和 24cm。计算球在两个截面间部分的体和（研究两种情况）。

85．已知球的半径等于 65cm，在球心的一侧有两个平行平面。这两个平面分别与球心相距19cm和 25cm。计算球在两个平面间部分的体积。

§3. 利用定积分计算旋转体的体积

由连续曲线$y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$），OX轴及直线$x=a$和$x=b$围成的曲边梯形（图105）绕着 OX 轴旋转所得图形的体积可按下式计算：

$$V=\pi\int_a^b y^2dx。\tag{12.11}$$

类似地，由连续曲线$x=\varphi(y)$（$c\leqslant y\leqslant d$），OY 轴及直线$y=c$和$y=d$围成的曲边梯形绕着OY轴旋转所得图形的体积可由下式求得：

$$V = \pi \int_{c}^{d} x^2 dy。 \tag{12.12}$$

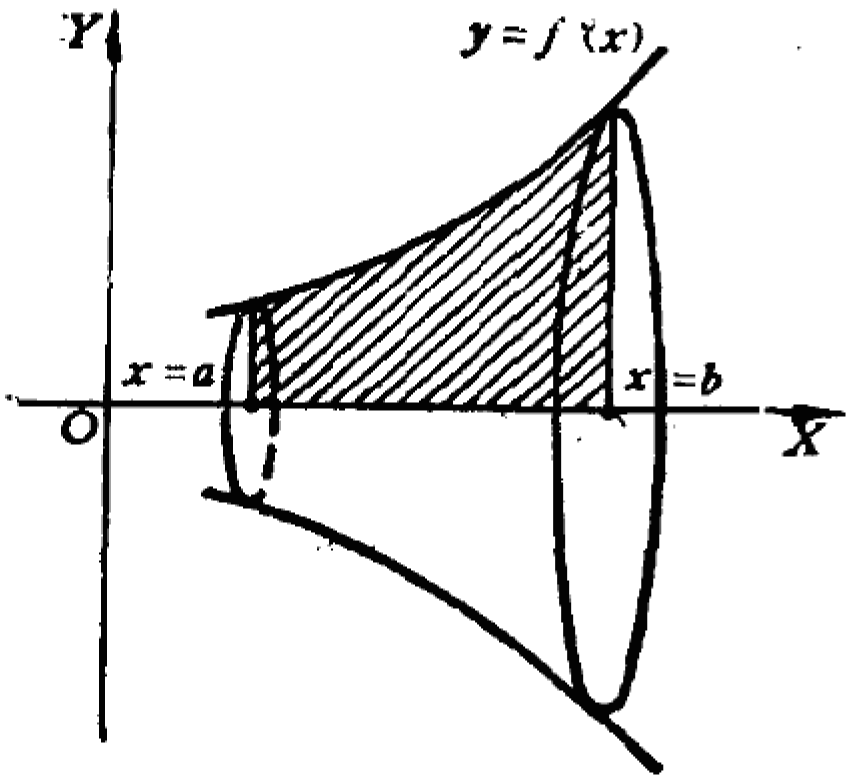


图 105

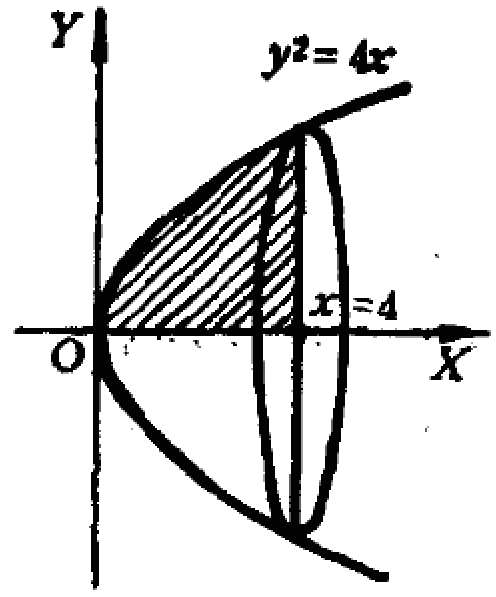


图 106

计算以指定的曲线为界的面积绕轴旋转而形成的旋转体的体积：

86. $y^2 = 4x$，$y = 0$ 和 $x = 4$ 绕 OX 轴旋转。

解：我们作出图形（图 106）。旋转图形是抛物面，积分限为 $a = 0$ 和 $b = 4$。根据公式（12.11）我们求得

$$V = \pi \int_{0}^{4} 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_{0}^{4} = 32\pi \text{（立方单位）}。$$

87. 1）$y^2 = x$，$y = 0$，$x = 1$ 和 $x = 2$；

2）$y^2 = 2x$，$y = 0$，$x = 2$ 和 $x = 4$；

3）$y^2 = 6x$，$y = 0$，$x = 1$ 和 $x = 3$；

4）$y^2 = 2(x + 2)$，$y = 0$ 和 $x = 0$。

（各小题中都绕 OX 轴旋转）

88. $y = x^2 - 9$ 和 $y = 0$ 绕 OX 轴旋转。

解：我们作出图形（图107），由于图形关于 OY 轴为对

称，我们取积分限由0到3，然后再将得到的结果加倍。根据公式（12.11）我们求得

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^3(x^2-9)^2dx=\pi\int_0^3(x^4-18x^2+81)dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}-6x^3+81x\right)_0^3=129.6\pi;$$

$$V=2\times129.6\pi=259.2\pi\text{（立方单位）}$$

89. 1）$y=x^2-1$和$y=0$；2）$y=3x-x^2$和$y=0$；3）$y=-x^2-x$和$y=0$（各小题都绕OY轴旋转）。

90. $x-2y+6=0$，$y=0$和$x=2$绕OX轴旋转。

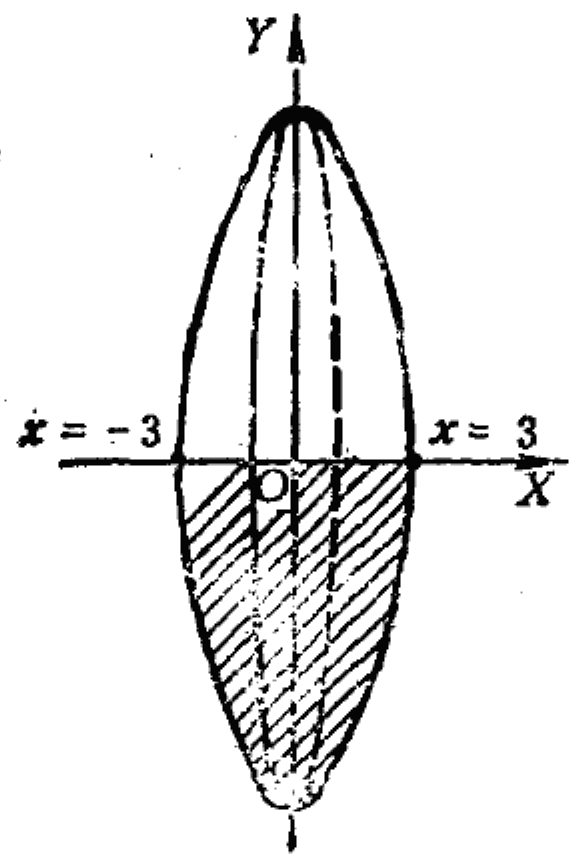


图 107

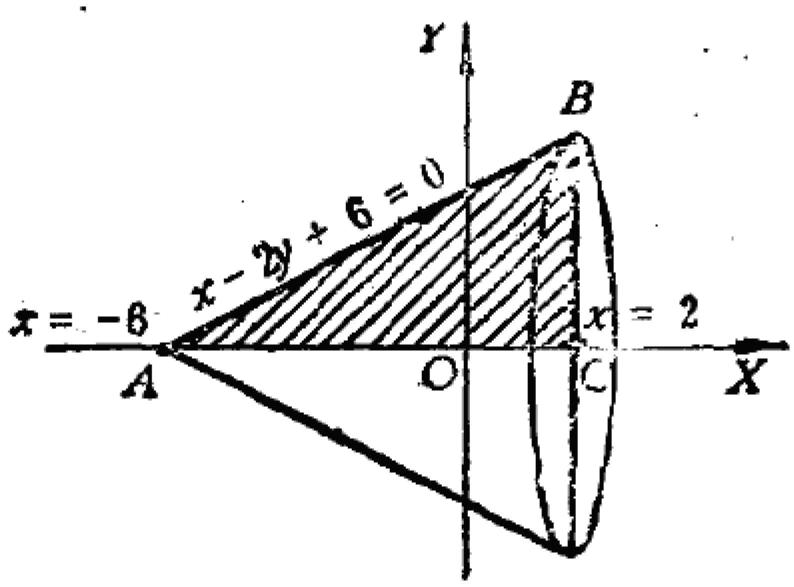


图 108

解：我们作出图形（图108）。直线$x-2y+6=0$与轴OX相交于点A（-6，0）；积分限为$a=-6$和$b=2$。我们来计算由$\triangle ABC$旋转而成的圆锥的体积，其中边AB用方程$y=\frac{1}{2}x+3$表示：

$$V=\pi\int_{-6}^{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-6}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2+3x+9\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^3}{12}+\frac{3x^2}{2}+9x\right)\Bigg|_{-6}^{2}$$

$$=42\frac{2}{3}\pi\text{（立方单位）。}$$

91．$x+2y-4=0$，$y=0$，$x=0$绕OX轴旋转。

92．$x^2+y^2=r^2$，$y=0$绕OX轴旋转。

93．$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$y=0$绕$OX$轴旋转。

解：旋转图形是椭球面。已知的椭圆与轴OX 相交于点$x_1=-a$和$x_2=a$。由椭圆方程我们有$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$。椭圆关于$OY$轴为对称，因此我们取积分限由0到$a$，并将求得的结果加倍：

$$\frac{V}{2}=\pi\int_{0}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\pi\left(b^2x-\frac{b^2x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{0}^{a}$$

$$=\frac{2}{3}ab^2\pi;$$

$$V=2\cdot\frac{2}{3}ab^2\pi=\frac{4}{3}ab^2\pi\text{（立方单位）。}$$

94．$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$x=0$绕$OY$轴旋转。

95. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$y=0$，$x=a$，$x=2a$ 绕 OX 轴旋转。

解：旋转图形是双曲面（图 109）。由双曲线方程我们有 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$。于是我们有：

$$V=\pi\int_a^{2a}\left(\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2\right)dx=\pi\left[\frac{b^2x^3}{3a^2}-b^2x\right]_a^{2a}$$

$$=\left[\left(\frac{8ab^2}{3}-2ab^2\right)-\left(\frac{ab^2}{3}-ab^2\right)\right]$$

$$=\pi\,\frac{8ab^2-6ab^2-ab^2+3ab^2}{3}$$

$$=\frac{4\pi ab^2}{3}\text{（立方单位）}。$$

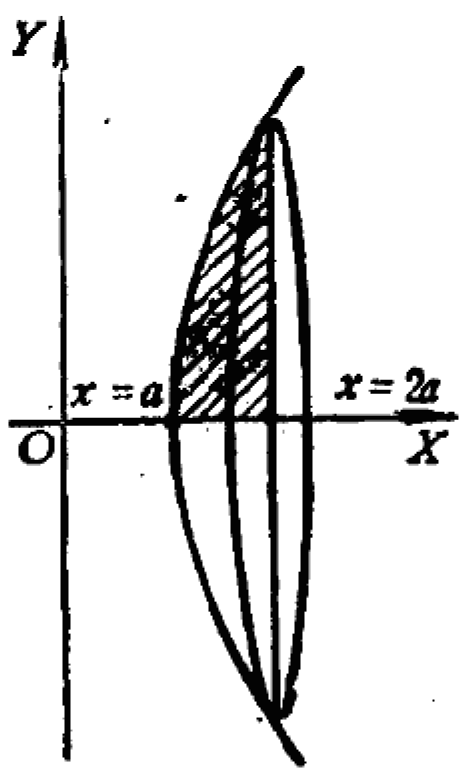


图 109

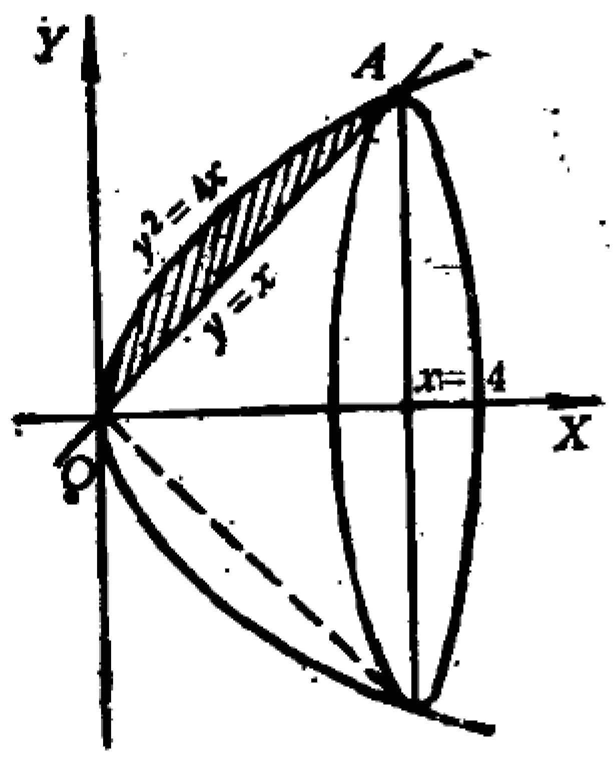


图 110

96. 1）$x^2-y^2=4$，$y=0$，$x=2$，$x=4$ 绕 OX 轴旋转；

2）$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$，$y=0$，$x=3$，$x=6$绕$OX$轴旋转。

97． 1）$y=\sin x, x=0, x=\pi$和$y=0$绕OX轴旋转；

2）$y=\cos x$，$y=0$，$x=0$，$x=\frac{\pi}{2}$绕OX轴旋转。

98．$y^2=4x$和$y=x$绕OX旋转。

解：我们作出图形（图110）。解方程组

$$\begin{cases} y^2=4x, \\ y=x, \end{cases}$$

我们求得抛物线与直线的交点为：$O(0, 0)$和$A(4, 4)$。因此，积分限为$a=0$，$b=4$。所求的体积是旋转曲线$y^2=2x$而成的抛物面的体积V_1和旋转直线$y=x$而成的圆锥的体积V_2的差：

$$V_1=\pi\int_0^4 4x dx=\pi 2x^2 \Big|_0 =32\pi;$$

$$V_2=\pi\int_0^4 x^2 dx=\pi\frac{x^3}{3}\Big|_4^0=\frac{64\pi}{3}=21\frac{1}{3}\pi;$$

$$V=V_1-V_2=32\pi-21\frac{1}{3}\pi=10\frac{2}{3}\pi \text{（立方单位）}.$$

99．$y^2=9x$和$y=3x$绕OX轴旋转。

100．$y^2=9(x+3)$和$x-y+3=0$绕OX轴旋转。

解：我们作出图形（图111）。解方程组

$$\begin{cases} y^2=9(x+3), \\ x-y+3=0, \end{cases}$$

我们求得抛物线和直线的交点为：$A(-3, 0)$和$B(6, 9)$；

积分限为$a=-3$和$b=6$。所求的体积是旋转曲线$y^2=9(x+3)$而成的抛物面的体积V_1与旋转直线$y=x+3$而成的圆锥的体积V_2的差：

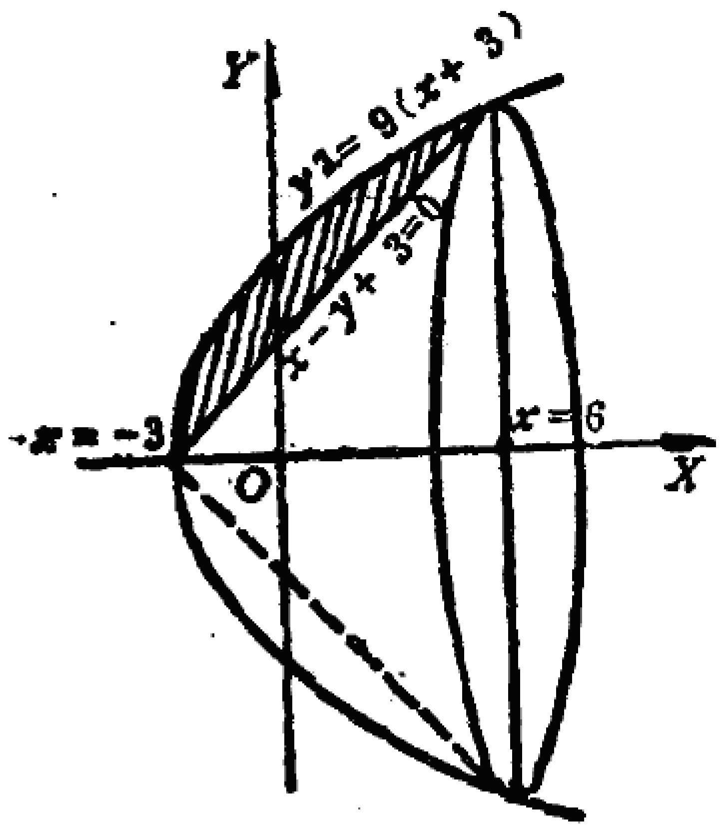


图 111

$$V_1=\pi\int_{-3}^{6}9(x+3)dx$$

$$=9\pi\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)_{-3}^{6}$$

$$=364.5\pi;$$

$$V_2=\pi\int_{-3}^{6}(x+3)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{3}(x+3)^3\Big|_{-3}^{6}=243\pi;$$

$V=V_1-V_2=364.5\pi-243\pi=121.5\pi$(立方单位)。

101. 1) $y^2=4(x+2)$和$x-y+2=0$;

2) $y^2=4(x-2)$, $y=0$, $x=3$和$x=6$;

3) $y=-x^2+5x$, $y=0$, $x=0$和$x=3$;

4) $y^2=4(x+2)$和$x-y+2=0$

(各小题中都绕OX 轴旋转)。

§4. 综 合 题

102. 已知直三棱柱的底面边长为25cm，24cm和36cm，它的全面积为1620cm²，求棱柱的体积。

103. 已知直平行六面体的底面边长为17cm和28cm，底面的长对角线为39cm。六面体的短对角线与底面成30°

角。求直平行六面体的体积。

104． 已知长方体的对角线与较小的侧面成 φ角。过底面的长边作长方体的截面，这个截面的周长等于 m且它与底面成 α角。求长方体的体积。

105． 已知正三棱锥的底面边长等于 a，而侧棱互相垂直，求这个正三棱锥的体积。

106． 根据正八面体的棱长 a 计算它的侧面积和体积。

107． 已知正六棱锥的底面边长等于 a，而侧面与底面组成的二面角等于 45°，求棱锥的体积。

108． 已知棱锥的底面是有两个角为α 和 β的三角形，棱锥的高等于 h 且与每条侧棱都成 φ角，求棱锥的体积。

109． 已知棱锥的底面是两对角线夹角为 α的平行四边形。棱锥的高等于H且过底面对角线的交点。不相等的两条侧棱与底面组成角 β和 γ 。求棱锥的体积。

110． 已知正三棱台的底面内切圆的半径分别为4cm 和 2.5cm，而侧棱对底面的倾角为 30°，求这个棱台的体积。

111． 已知圆柱与平行于它的轴的平面相交。这个平面在底面圆周上截得的弧为 a，截面的对角线为 l 且与底面组成的角为 φ。求圆柱的体积。

112． 已知圆锥的底面上有一个边长为 a 的正方形。过圆锥顶点和正方形一边所作的平面与圆锥表面形成顶角为 α 的三角形。求圆锥的体积。

113． 已知圆锥的轴截面是顶角为 α的三角形。这个三角形的外接圆的半径等于 R。求圆锥的体积。

114． 已知圆台的高等于 12cm，而底面半径等于 6cm 和 9cm。两个平行于底面的平面将高分成三等分。求圆台的中间部分的体积。

115. 已知半径为 R 的球有一个外切圆台。圆台的一个底面是另一个底面的二倍。求圆台的体积。

116. 已知圆锥内有一个内切球。圆锥的母线对底面的倾角为60°，而球的半径等于 R。求圆锥的体积。

117. 已知半径为 R 的球内有一个内接圆锥。圆锥的轴截面的顶角为60°。求圆锥的体积。

118. 已知半径为 R 的球内有一个内接圆柱。这个圆柱的轴截面对角线对底面的倾角为30°。求圆柱的体积。

119. 已知球内有一个内接圆柱。球的半径等于 R，圆柱底面的半径等于 r。求圆柱的体积。

120. 已知圆锥内有一个内接圆柱。这个圆柱的轴截面的两条对角线平行于圆锥的两条母线。圆锥的母线等于 l 且与底面成 α 角。求圆锥的底面与圆柱及圆锥的侧面围成的图形的体积。

121. 已知直角三角形的斜边等于 $2a$，它的一个锐角等于30°。将这个三角形绕着过直角顶点且平行于斜边的轴旋转。求得到的图形的体积。

小 测 验

第一组

1) 已知棱锥的底面是一条直角边为6cm而它的对角为60°的直角三角形，棱锥的每条侧棱都等于4cm。求棱锥的体积。

2) 已知底边为 a 而底角为 α 的等腰三角形绕着它的一腰旋转。求旋转图形的体积。

第二组

1) 已知直平行六面体的底面是一条对角线为17cm而边长为9cm和10cm的平行四边形。六面体的全面积为334cm^2，求它的体积。

2) 已知边长为 a 而锐角为 α 的棱形绕着过锐角顶点且垂直

3） 求由曲线 $y^2-x+1=0$ 和直线$x-2=0$，$y=0$围成的图形绕着OX轴旋转而成的旋转体的体积。

于它的边的直线旋转。求旋转图形的体积。

3） 求由曲线 $y=-x^2+2x$ 和直线$y=0$围成的图形绕着OX轴旋转而成的旋转体的体积。

第十三章　旋转体的表面积

§1.　圆柱的侧面积和全面积

圆柱的侧面积等于圆柱的底面圆周长与高的乘积：

$$S_{圆柱侧}=2\pi RH。\qquad(13.1)$$

圆柱的全面积可按下式计算：

$$S_{圆柱全}=2\pi RH+2\pi R^2。\qquad(13.2)$$

1.　已知圆柱的轴截面的面积等于S。求圆柱的侧面积。

2.　已知圆柱的母线等于l。求圆柱的侧面积。

3.　已知圆柱的侧面积等于它的全面积的一半，轴截面的对角线等于5cm。求圆柱的全面积。

4.　已知圆柱底面上的长度为a的弦所对的劣弧为φ，圆柱的高等于H。求圆柱的全面积。

5.　已知过圆柱底面半径的中点且垂直于底面的截面是方正形，其面积为16cm²。求圆柱的侧面积。

6.　如果圆柱的全面积等于1170πcm²，而它的底面半径为15cm，那么距圆柱的轴多远的截面为正方形？

7.　已知边长为a的正方形绕着它外部的一条平行于它的边的轴旋转。这条轴到正方形的距离等于正方形的边长。求所得的旋转体的体积。

8.　已知圆锥的底面半径为R，高为H。试从这个圆锥

的所有内接圆柱中求出具有最大侧面积的那个圆柱。

解：设r为所求的圆柱的底面半径，h为圆柱的高（参看图103）。由于$\triangle ABO_1$和$\triangle CBO$相似，我们有$\frac{R}{r}=\frac{H}{H-h}$。

由此得$r=\frac{R(H-h)}{H}$。将r的值代入圆柱的侧面积公式$S=2\pi rH$，我们求得：

$$S=2\pi h\frac{R(H-h)}{H}\text{，或}\quad S=\frac{2\pi R}{H}(Hh-h^2)$$

$(0<h<H)$。

我们利用二阶导数来研究函数的极值：

$$S'=\frac{2\pi R}{H}(H-2h)\text{；}$$

$$\frac{2\pi R}{H}(H-2h)=0\text{，}H-2h=0\text{；}h=\frac{H}{2}\text{；}$$

$$S''=-\frac{4\pi R}{H}\text{。}$$

二阶导数为负，因此，当$h=\frac{H}{2}$时函数有极大值。

这时，所求圆柱的底面半径为：

$$r=\frac{R-(H-\frac{H}{2})}{H}=\frac{R}{2}\text{。}$$

9. 从已知圆锥（给出R和H）的所有内接圆柱中求出具有最大全面积的那个圆柱。

10. 试从体积为V的所有圆柱中求出具有最小全面积的那个圆柱。

11．在给定体积V的条件下，求出表面积最小的圆柱形水桶（无盖）的底面半径和高。

12．试从半径为R的球的所有内接圆柱中求出侧面积最大的那个圆柱。

13．在给定表面积S的条件下，求出体积最大的圆柱形水桶（无盖）的底面半径和高。

14．试从全面积为S的所有圆柱中求出体积最大的那个圆柱。

§2．圆锥的侧面积和全面积

圆锥的侧面积等于底面的圆周长与母线长的乘积的一半：

$$S_{圆锥侧}=\pi RL。\qquad (13.3)$$

圆锥的全面积按下式计算：

$$S_{圆锥全}=\pi RL+\pi R^2。\qquad (13.4)$$

15．如果圆锥的底面积等于M，轴截面的面积等于N，求圆锥的侧面积。

16．已知等边圆锥的轴截面的面积等于Q，求它的全面积。

17．已知圆锥的母线与底面成α角，底面圆周的一条弦等于a，而这条弦所对的圆心角等于φ。求圆锥的全面积。

18．已知圆锥的底面半径等于R。过夹角为β的两条母线作截面与圆锥底面相交，其交线在底面圆周上所对的弧为$\alpha(\alpha<180°)$。求圆锥的全面积。

19．已知直角边为3cm和4cm的直角三角形绕着过直角顶点且平行于斜边的轴旋转，求旋转体的表面积。

20．在等边圆锥中有一个内接等边圆柱。如果圆柱的侧面积等于S，求圆锥的侧面。

21．已知圆锥内有一个内接正n棱锥，这个棱锥的侧面在顶点处的面角都等于a。如果圆锥的底面半径等于r，求圆锥的侧面积。

22．已知两边为8cm和5cm且其夹角为60°的三角形绕着过60°角的顶点且垂直于最短边的轴旋转。求旋转体的表面积。

23．已知底面边长为a的正四棱锥内有一个内切圆锥，棱锥的侧面与底面组成的二面角都等于α，求圆锥的全面积。

24．已知正棱锥的侧棱等于m且与底面成α角，求这个棱锥的外接圆锥的全面积。

25．试从给定侧面积S的所有圆锥中求出体积最大的那个圆锥。

解：圆锥的体积$V=\dfrac{\pi R^2H}{3}$，但$H=\sqrt{l^2-R^2}$。

由圆锥的侧面积公式$S=\pi Rl$求得$l=\dfrac{S}{\pi R}$。于是

$$H=\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2R^2}-R^2}=\frac{1}{\pi R}\sqrt{S^2-\pi^2R^4}$$

$\left(S^2-\pi^2R^4>0,\ R<\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}\right)$。

将H值代入圆锥的体积公式，我们得

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{1}{\pi R}\sqrt{S^2-\pi^2R^4}=\frac{1}{3}R\sqrt{S^2-\pi^2R^4}。$$

我们借助一阶导数来研究这个函数的极值：

$$V' = \frac{1}{3}\left(\sqrt{S^2 - \pi^2 R^4} - \frac{2\pi^2 R^4}{\sqrt{S^2 - \pi^2 R^4}}\right)$$

$$= \frac{S^2 - 3\pi^2 R^4}{3\sqrt{S^2 - \pi^2 R^4}},$$

$$S^2 - 3\pi^2 R^4 = 0, \quad R^4 = \frac{S^2}{3\pi^2}, \quad R = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}\,\pi}},$$

$$V'_{R<\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}\pi}}} > 0, \quad V'_{R>\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}\pi}}} < 0.$$

因此，当$R = \sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}\,\pi}}$时函数有极大值。我们求得圆锥的高为：

$$H = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}\,\pi}}}\sqrt{S^2 - \pi^2\frac{S^2}{3\pi^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}\,\pi}}}S\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{3}\,\pi}}.$$

26. 试从半径为R的球的所有内接圆锥中求出具有最大侧面积的那个圆锥。

§3. 圆台的侧面积和全面积

圆台的侧面积等于两个底面圆周长之和的一半与母线长的乘积：

$$S_{圆台侧} = \pi(R_1 + R_2)L. \qquad (13.5)$$

圆台的全面积按下式计算：

$$S_{圆台全}=\pi(R_1+R_2)L+\pi(R_1^2+R_2^2) \qquad (13.6)$$

27．已知圆台的底面半径等于R和r，而母线与底面成$60°$角。求圆台的侧面积。

28．已知半径为r的球有一个外切圆台。圆台的母线与底面成α角。求这个圆台的侧面积。

29．如果圆台的侧面积与两个底面积的和相等，而底面半径等于R和r。求圆台的高。

30．已知圆台的轴截面的对角线互相垂直，母线等于l且与下底面成α角。求圆台的全面积。

31．已知圆台的下底面，上底面和侧面的面积之比为$m:n:p$。求母线与下底面间的角。

32．已知圆台的母线等于l且对底面的倾角为α。两个底面半径的比为$m:n(m>n)$。求圆台的侧面积。

33．已知半径为6cm的球有一个外切圆台，圆台的两个底面的半径之比为4:9。求圆台的侧面积。

34．已知圆台中有一个半径为r的内切球。由球心对圆台大底直径的视角为α。求圆台的侧面积。

§4． 球面和它的部分的面积

半径为R的球的表面积公式为：

$$S=4\pi R^2。 \qquad (13.7)$$

球带和球冠的表面积都等于它们的高与球的最大截面圆周的乘积：

$$S_{球带}=2\pi RH，S_{球冠}=2\pi RH。 \qquad (13.8)$$

35．计算下列图形的内切球的表面积：

1）表面积为S的立方体的内切球；

2）表面积为S的正四面体的内切球；

3）轴截面的对角线为m的等边圆柱的内切球；

4）表面积为S的等边圆锥的内切球。

36．计算下列图形的内切球和外接球的面积的比：1）立方体；2）正四面体；3）等边圆柱；4）等边圆锥。

37．已知球的体积等于V，求它的表面积。

38．已知圆台的底面半径等于24cm和15cm，高等于27cm。求它的外接球的表面积。

39．已知球带的底面半径等于10cm和12cm，它的高为11cm。计算球的表面积。

40．已知半径为R而顶角为α的扇形绕着圆的一条直径旋转。这条直径与扇形的弧不相交，它与扇形最接近的一条半径成β角。求与扇形弧相对应的球带的表面积。

41．如果球面扇形的轴截面上的弧含有$120°$，而球的半径等于R。计算球面扇形的全面积。

42．球缺的表面积连同它的底面积一起等于S。如果球的半径等于R，试计算球缺的高。

43．已知含有$120°$弧且面积为Q的弓形绕着自己的高旋转，计算所得图形的全面积。

§5. 利用定积分计算旋转体的表面积

平面曲线$y=f(x)$上的弧$\overset{\frown}{AB}$绕着轴OX旋转就构成旋转曲面（图112）。

这个曲面的面积的微分dS等于底面半径分别为y和$y+dy$而母线为dl的圆台的侧面积：

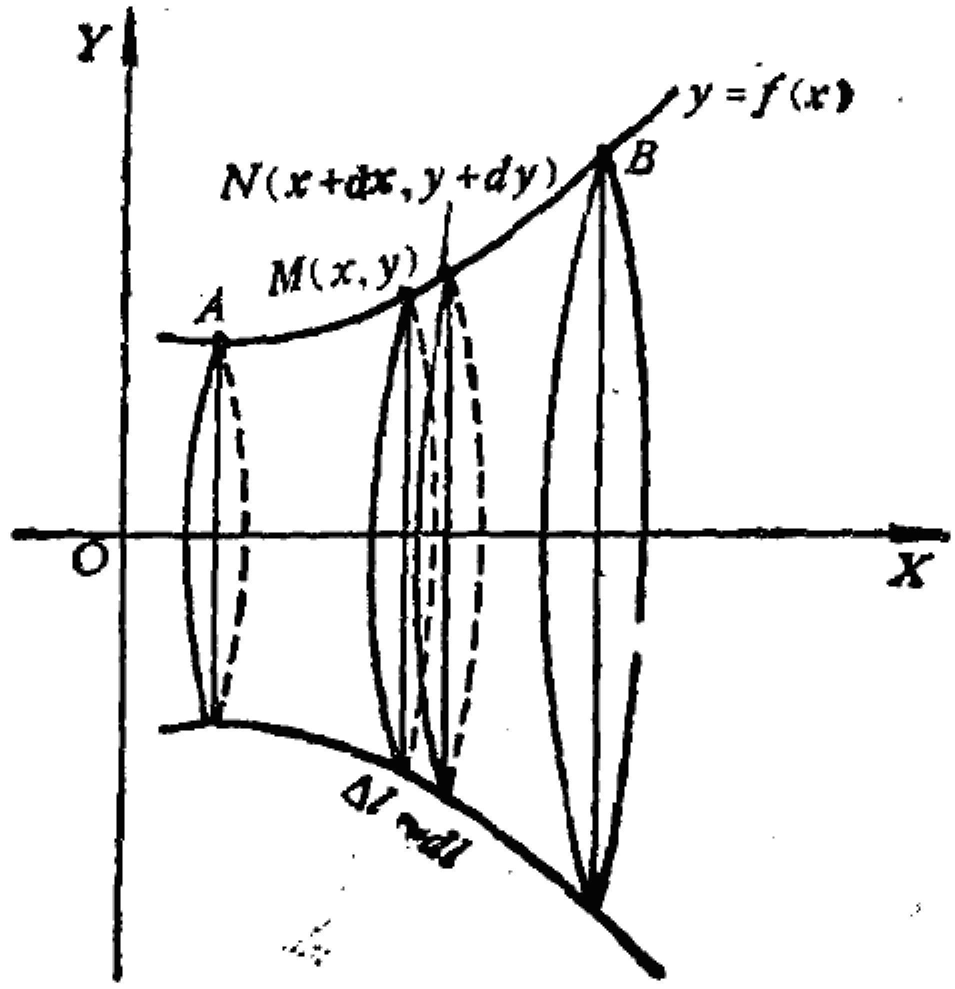


图 112

$$dS = \frac{2\pi y + 2\pi(y + dy)}{2} dl = \pi(2y + dy)dl \approx 2\pi y dl$$

（被加数dy同$2y$比起来是很微小的量，因此dy可忽略不计）。

弧 $\overset{\frown}{AB}$ 绕着轴OX旋转而成的图形的面积可按下式计算：

$$S = \int_a^b dS = 2\pi \int_a^b y dl = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

(13.9)

这里a和b为自变量x在点A和B的值。

类似地，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 绕着轴OY旋转，我们有 $dS = 2\pi x dl$。由此得

$$S = 2\pi \int_c^d x dl = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy,$$

(13.10)

这里c和d为自变量y在点A和B的值。

44. 求圆$x^2+y^2=r^2$绕着轴OX旋转而成的球的表面积。

解：微分圆的方程 $x^2+y^2=r^2$，得

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}。$$

我们来求弧的微分：

$$dl=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,xd=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\;dx$$

$$=\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}dx=\frac{rdx}{y}。$$

将dl值代入公式（7.9）并取积分限由$-r$到r，我们求得：

$$S=2\pi\int_{-r}^{r}y\cdot\frac{rdx}{y}=2\pi r\int_{-r}^{r}dx=2\pi rx\Big|_{-r}^{r}$$

$$=4\pi r^2。$$

45. 已知圆$x^2+y^2=r^2$上的弧绕着轴OX旋转，求旋转而成的高为H的球台的表面积（图113）。

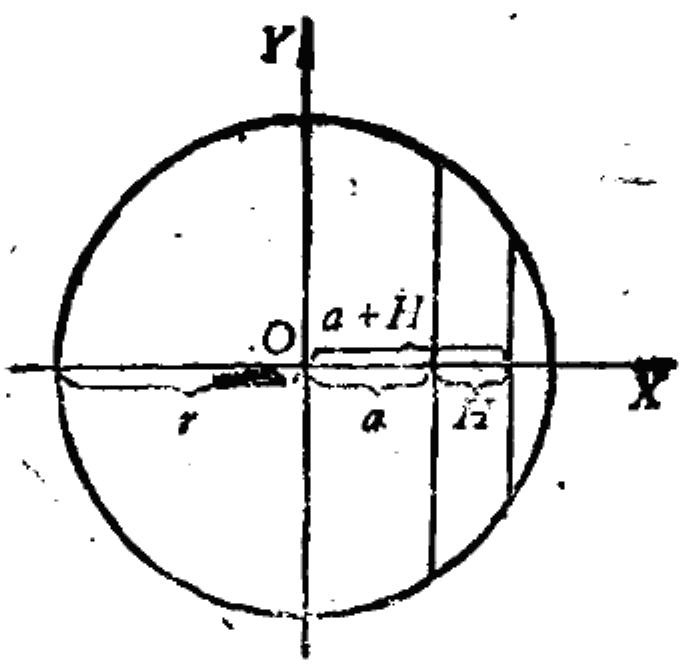


图 113

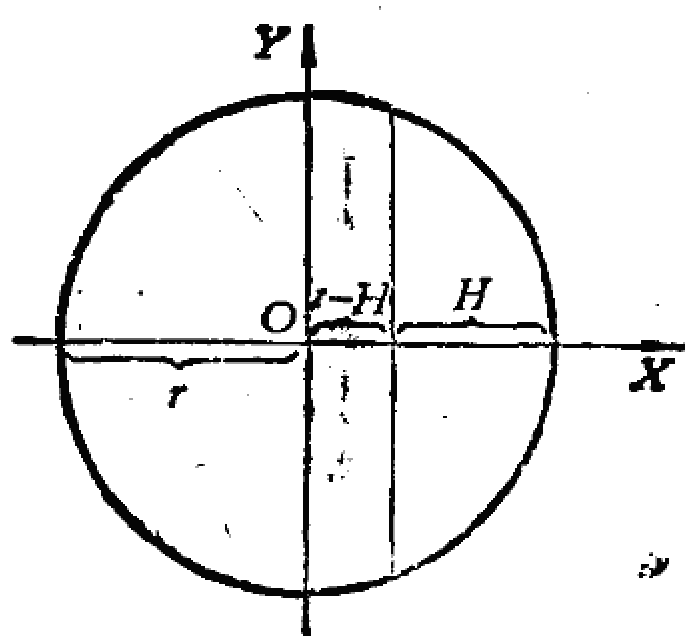


图 114

46. 已知圆$x^2+y^2=r^2$上的弧绕着轴OX旋转．求旋转而成的高为H的球缺的表面积（图114）。

47. 已知圆$x^2+y^2=16$上的两点A（2，$2\sqrt{3}$）和B（3，$\sqrt{7}$）之间的弧绕着OX轴旋转，求所得的球带的表面积。

48. 已知圆$x^2+y^2=25$上的两点$A(4,-3)$和$B(3,4)$之间的弧绕着OY轴旋转，求所得的球带的表面积。

49. 已知圆$(x-4)^2+y^2=36$上的两点$A(2,4\sqrt{2})$和$B(4,6)$之间的弧绕着OX轴旋转，求所得的曲面的面积。

解：微分圆的关于x的方程，得：

$$2(x-4)+2y\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x-4}{y},\ y\frac{dy}{dx}=-(x-4)。$$

于是有：

$$S=2\pi\int_2^4 y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_2^4\sqrt{y^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_2^4\sqrt{36-(x-4)^2+(x-4)^2}\,dx=12\pi\int_2^4 dx$$

$$=12\pi x\Big|_2^4=24\pi(\text{平方单位})。$$

50. 已知圆$x^2+(y-2)^2=25$上的两点$A(2\sqrt{6},1)$和$B(4,5)$之间的弧绕着OY轴旋转．求旋转而成的曲面的面积。

51. 已知抛物线$y^2=4x$上的两点$A(0,0)$和$B(3,2\sqrt{3})$之间的弧绕着OX轴旋转，求所得的曲面的面积。

52. 求抛物线$y=9x^2$上的两点(0,0)和(4,6)之间的弧绕着OX轴旋转而成的曲面的面积。

§6. 综 合 题

53. 已知球内有一个内接圆柱，球的半径等于29cm，圆柱的侧面积等于$1680\pi cm^2$。求圆柱的体积。

54. 已知球内有一个内接圆柱，圆柱的底面半径与高的比为2:3，球的表面积等于225π。求圆柱的全面积。

55. 已知等边圆柱有一个外接球，求它们的体积比和表面积比。

56. 已知圆柱外切于一个球，求它们的表面积比和体积比。

57. 圆柱的高等于5cm。如果它的高增加4cm，它的体积就增加$36\pi cm^3$，求圆柱的侧面。

58. 已知圆锥和圆柱具有公共高和公共底面，且公共底面的面积等于$4\pi cm^2$。圆锥的侧面积与圆柱的侧面积之比为5:6。求给定的两物体的母线长。

59. 已知底边为a而底角为α的等腰三角形绕着它的一条腰旋转，求旋转体的表面积和体积。

60. 平行四边形的两边为m和n，它们的夹角为α。求平行四边形绕着其长度为n的边旋转而形成的图形的表面积。

61. 圆锥绕着自己的固定的顶点在平面上滚动。如圆锥的高等于h，母线等于l，求圆锥的高扫过的曲面的面积。

62. 边长为a而锐角为60°的棱形绕着过锐角顶点且垂直于它的一边的轴旋转，求所得的图形的表面积。

63．已知圆台的高等于h，轴截面的对角线的夹角（向着底面）等于α，而母线与底面组成的锐角为β。求圆台的侧面积。

64．已知半径为25cm的球被一平面所截，其截面的面积为$49\pi cm^2$，计算球冠的面积。

65．已知球缺的侧面积为球面的面积的0.05。如果球面半径等于100cm，计算球缺的高。

66．证明：由正方形绕着一边旋转而形成的图形的表面积等于其半径为正方形的边长的球面积。

67．已知凸透镜是由两个相等的球缺组成的，它们的公共底面积为S，而每个球缺在轴截面上的弧都等于α，求这个凸透镜的表面积。

68．如果外切于球的圆柱的全面积等于S，计算球的表面积。

69．如果圆锥的母线对底面的倾角为α，求圆锥的全面积与内切球的面积之比。

小 测 验

第一组

1）已知矩形的面积为S，对角线的夹角为α，这个矩形绕着过它的一个顶点且平行于它的对角线的直线旋转一周，计算旋转图形的表面积。

2）已知圆锥的母线等于l且与圆锥的高成α角。计算外接球的表面积。

第二组

1）已知边长为a而锐角为α的棱形绕着一条直线旋转一周。这条直线过棱形的一个锐角的顶点且垂直于它的边。计算旋转图形的表面积。

2）已知圆锥的母线等于l且与圆锥的高成α角。计算内切球的表面积。

习 题 答 案

第一章

2. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$;

   6) $\frac{3\pi}{4}$; 7) $\frac{5\pi}{6}$; 8) π; 9) $\frac{7\pi}{6}$; 10) $\frac{5\pi}{4}$;

   11) $\frac{3\pi}{2}$; 12) $\frac{11\pi}{6}$

3. 1) 0.2670; 2) 1.2421; 3) 0.2667; 4) 2.0199;

   5) 3.7554; 6) 5.4510; 7) 1.0021; 8) 1.5271

4. 1) 0.253; 2) 0.476; 3) 1.309; 4) 2.27;

   5) 0.675; 6) 1.50

6. 1) 25°; 2) 105°; 3) 110°; 4) 100°;

   5) 99°; 6) 78°; 7) 330°; 8) 240°

7. 1) 17°14′; 2) 32°49′; 3) 60°; 4) 77°05′;

   5) 85°05′; 6) 100°

9. 0.56米

10. 1.08米

12. 4.6弧度

13. 0.75米

16. 3.2

17. 0.2米

18. $\frac{\pi}{2}$秒

21．3米/秒

22．5

23．6 秒

25．6 弧度/秒，－2 弧度/秒^2，通过 5 秒

26．$\frac{\pi}{9}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{9}$

27．$\frac{\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{9}$，$\frac{5\pi}{9}$，$\frac{2\pi}{3}$

28．$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{8}$，$\frac{3\pi}{4}$，$\frac{7\pi}{8}$

29．0.3m

30．$\frac{2\pi}{15}$

31．$\frac{13\pi}{18}$

32．$\frac{\pi}{21600}$小时，$\frac{\pi}{1800}$分，$\frac{\pi}{30}$秒

33．1)16弧度/秒；2）1.6π米/秒；3）9.6π米/秒

34．经过 3 秒

36．1）在第Ⅱ象限；2）在第Ⅳ象限；
3）在第Ⅱ象限；4）在第Ⅱ象限；
5）在第Ⅱ象限；6）在第Ⅲ象限；
7）在第Ⅰ象限；8）在第Ⅲ象限；
9）在第Ⅰ象限；10）在第Ⅰ象限；
11）在第Ⅱ象限；12）在第Ⅱ象限；
13）在第Ⅰ象限；14）在第Ⅳ象限；
15）在第Ⅳ象限；16）在第Ⅱ象限；

17）在第Ⅱ象限，18）在第Ⅱ象限

37\. 1）$360^\circ\times6+40^\circ$；　　2）$360^\circ\times(-2)+170^\circ$；

3）$360^\circ\times(-2)-20^\circ$；　　4）$360^\circ\times3+90^\circ$；

5）$360^\circ\times(-4)-10^\circ$；　　6）$360^\circ+160^\circ$

39\. 1）$2k\pi, k\in Z$；

2）$2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$；

3）$2k\pi+\pi=(2k+1)\pi, k\in Z$；

4）$2k\pi-\frac{\pi}{2}$或$2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in Z$

40\. $2k\pi+\frac{\pi}{6}$；$2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$2k\pi+\frac{\pi}{2}$；

$2k\pi+\frac{2\pi}{3}$；$2k\pi+\frac{5\pi}{6}$；$(2k+1)\pi$；

$2k\pi+\frac{7\pi}{6}$；$2k\pi+\frac{4\pi}{3}$；$2k\pi+\frac{3\pi}{2}$；

$2k\pi+\frac{5\pi}{3}$；$2k\pi+\frac{11\pi}{6}$；$2k\pi, k\in Z$

41\. 1）-2π，$-\pi$，0，π，2π；

2）$-\frac{15\pi}{4}$，$-\frac{7\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{9\pi}{4}$，$\frac{17}{4}\pi$；

3）$-\frac{11\pi}{3}$，$-\frac{5\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{7\pi}{3}$，$\frac{13\pi}{3}$；

4）$-\frac{11\pi}{6}$，$-\frac{7\pi}{6}$，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{13\pi}{6}$

44. 1）在第Ⅱ象限；　　2）在第Ⅰ象限；

3）在点（0，－1）；4）在点（0，－1）

45. 1）$\alpha = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in Z$；

2）$\alpha = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, k \in Z$；

3）$\alpha = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}, k \in Z$；

4）$\alpha = 180°k + 40°, k \in Z$

47. 1）$x \neq \pm\sqrt{\pi |k|}, k \in Z$；

2）$x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$；

3）$x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z$；

4）$x \neq \frac{k\pi}{3}, k \in Z$；

5）$x \neq k\pi, k \in Z$；

6）$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$

49. 1）在$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 1$时，$y_{最大} = 1$，

在$x = 2k\pi + 1 - \frac{\pi}{2}$时，$y_{最小} = -1, k \in Z$；

2）在$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$时，$y_{最大} = 1$，

在$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$时，$y_{最小}=-1$，$k\in Z$；

3）在$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$时，$y_{最大}=3$，在$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$时，$y_{最小}=-3$，$k\in Z$；

4）在$x=\frac{2k\pi}{2}$时，$y_{最大}=\frac{1}{2}$，

在$x=\frac{(2k+1)\pi}{5}$时，$y_{最小}=-\frac{1}{2}$，$k\in Z$

51．1）$x=2k\pi, k\in Z$；

2）$x=3k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in Z$；

3）$x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$；

4）$x=3k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in Z$

52．1）$(-\infty, \infty)$；2）$x\neq k\pi, k\in Z$；

3）$x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z$；4）$x\neq k\pi, k\in Z$；

5）$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$；6）$x\neq k\pi, k\in Z$；

7）$x\neq k\pi-\frac{\pi}{4}, k\in Z$；8）$x\neq\frac{k\pi}{3}, x\neq\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}, k\in Z$；

9）$x\neq k\pi$，$x\neq 2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$k$，$n\in Z$；

10) $x \neq k\pi$, $x \neq n\pi + \frac{\pi}{4}$, $k, n \in Z$

53. 1) $-1 \leqslant E(y) \leqslant 1$; 2) $0 \leqslant E(y) \leqslant 1$;

3) $-1 \leqslant E(y) \leqslant 1$; 4) $0 \leqslant E(y) \leqslant 1$

54. 1) $0 \leqslant E(y) \leqslant 2$; 2) $2 \leqslant E(y) \leqslant 4$;

3) $1 \leqslant E(y) \leqslant 3$; 4) $4 \leqslant E(y) \leqslant 6$

55. 1) 没有; 2) $y_{最小} = 0$; 3) $y_{最小} = 0$

56. 1) $y_{最大} = 5$, $y_{最小} = 3$;

2) $y_{最大} = 6$, $y_{最小} = 5$;

3) $y_{最大} = m$, $y_{最小} = n$;

4) $y_{最大} = 5$, $y_{最小} = 2$

58. 1) +; 2) +; 3) −; 4) −;

5) 不存在; 6) +; 7) +; 8) −;

9) −; 10) −; 11) −; 12) +

60. 1)、2)、3)、7)、8) 的符号为"+", 其余的符号为"−"

61. 1)、2)、5)、6)、7) 的符号为"+", 其余的符号为"−"

63. 1) 1; 2) −2; 3) −1

65. 1)在第Ⅱ或第Ⅳ象限; 2)在第Ⅲ或第Ⅳ象限; 3)在第Ⅰ或第Ⅳ象限; 4)在第Ⅰ或第Ⅱ象限

67. 1) 1; 2) 0; 3) −1; 4) 0; 5) 0;

6) 1; 7) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$; 8) −5; 9) −13;

10) 21; 11) 3.5; 12) 2; 13) $\frac{a-b}{a+b}$;

14) $a-b$; 15) 2; 16) $3\sqrt{3}$

68. 1) 5，3，$-5-\sqrt{3}$，-5；2) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$；

3) 4；4) $\frac{3}{4}$

69. 1)、7)、10)、12) 为"+"，其余为"-"

70. 1)、4)为"+"，其余为"-"

71. 1) Ⅰ或Ⅲ；2) Ⅰ或Ⅱ；3) Ⅰ或Ⅲ；

4) Ⅰ或Ⅱ；5) Ⅰ或Ⅳ；6) Ⅰ或Ⅲ；

7)任一象限；8) Ⅰ或Ⅲ

72. 1) +；2) +；3) -

73. 1) 0；2) -3；3) $(a-b)^2$；4) $\frac{\sqrt{3}}{4}$；

5) 4；6) 5；7) $\frac{4-\sqrt{2}}{4}$；8) $\frac{3}{4}$

74. 1) $(a+b)$；$(a-b)$；2) a^2+b^2；

3) a^3-b^3；4) $\frac{a+b}{a}$

80. 1) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，$tg\alpha=-\frac{5}{12}$，$ctg\alpha=-\frac{12}{5}$；

2) $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$tg\alpha=-\frac{15}{8}$，$ctg\alpha=-\frac{8}{15}$；

3) $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$，$\cos\alpha=-\frac{15}{17}$，$ctg\alpha=\frac{15}{8}$；

4) $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$，$\cos\alpha=\frac{7}{25}$，$tg\alpha=-\frac{24}{7}$

82. 1) $\frac{1}{\cos^2\alpha}(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z)$; 2) $\sin^2\alpha$;

3) 0; 4) $\frac{2}{\sin\alpha}(\alpha\neq k\pi,\ k\in Z)$;

5) 1; 6) 1; 7) $\cos\alpha-\sin\alpha$; 8) 1

88. 1) $\frac{6}{19}$; 2) $\frac{3}{4}$

89. 1) 2; 2) $\cos^2\alpha$; 3) 1; 4) $0\ (\alpha\neq k\pi,\ k\in Z)$;

5) $\text{ctg}\alpha(\alpha\neq k\pi,k\in Z)$; 6) $\text{ctg}\alpha(\alpha\neq\frac{k\pi}{2},k\in Z)$;

7) $\frac{2}{\cos^2\alpha}(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z)$;

8) $-\frac{1}{\cos\alpha}(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z)$

91. 1) $\frac{17}{25}$; 2) $\frac{13}{25}$; 3) $\frac{25}{21}$; 4) $\frac{21}{40}$

92. 1) $\pm\sqrt{5}$; 2) $\pm3\sqrt{5}$; 3) 7; 4) 18

小测验

第一组 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-$;

3) $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$; $\alpha\neq\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4},n\in Z$;

4) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\text{tg}\alpha=\sqrt{3}$;

5）$\alpha\neq\frac{k\pi}{2},k\in Z$；$\alpha\neq n\pi\pm\frac{\pi}{4},n\in Z$

第二组　1）$3\sqrt{3}$；

2）$-$；3）$x\neq 3k\pi,k\in Z$；$x\neq\frac{n\pi}{2},n\in Z$；

4）$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

5）$\alpha\neq\frac{k\pi}{2},k\in Z$；$\alpha\neq n\pi-\frac{\pi}{4},n\in Z$

94．1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；2）0；3）1；4）$\sqrt{3}$；5）0.682。

95．1）1.5389；2）2；3）$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$；4）-0.121；

5）1

97．1）$\lambda=\frac{2\pi}{3}$；2）$\lambda=8\pi$；3）$\lambda=\frac{\pi}{2}$；4）$\lambda=5\pi$

99．1）2π；2）24π；3）6π；4）16π

100．1）5；2）7；3）1；4）0；

5）-1；6）$-\frac{1}{2}$；7）-1

101．1）12；2）$\frac{3}{2}$；3）6；4）$\frac{2\pi}{3}$；

5）2π；6）2π；7）2π；8）π

102．1）$2\sin^2\alpha$；2）3；3）$2\cos\alpha$；4）2

105. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $-\frac{1}{2}$;

7) $-\frac{1}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

10) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 11) $\frac{1}{2}$; 12) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

107. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

109. 1) -0.375; 2) -0.743; 3) -0.375;
4) -0.899; 5) 0.574; 6) -0.883

112. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) -1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) -0.8391;

5) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) -0.9848; 7) 0.8391;

8) 2.747; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) -0.1736;

11) 0.1736; 12) -0.364; 13) -1.4281;
14) -0.2588; 15) 0.4226; 16) -0.4663

114. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) 1;

5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $-\sqrt{3}$; 7) $-\sqrt{3}$; 8) -0.6428;

9) -0.6428; 10) 2.747; 11) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 12) 0.9397

116. 1) -0.375; 2) -0.857; 3) -0.424

117. 1) -1; 2) -3; 3) 0; 4) $\sqrt{3}$;

5) $-\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{3}-1$; 7) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

118. 1) 1; 2) 1

120. 1) $\{2k\pi \mid k \in Z\}$; 2) $\left\{k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} \mid k \in Z\right\}$

3) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$;

4) $\{k\pi, k\pi + (-1)^k \arcsin 0.4 \mid k \in Z\}$;

5) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi \pm \arccos\frac{1}{3} \mid k \in Z\right\}$;

6) $\{k\pi,\ k\pi + \mathrm{arctg}\,2.4 \mid k \in Z\}$;

7) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \mathrm{arcctg}\,1.5 \mid k \in Z\right\}$

小测验

第一组 1) 0, 2) $2+\sqrt{2}$,

4) $\{k\pi + \mathrm{arctg}\,2,\ k\pi + \mathrm{arctg}\,4 \mid k \in Z\}$,

5) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi - \mathrm{arctg}\,2 \mid k \in Z\right\}$

第二组　1) 1；2) 0；

4) $\{k\pi+\mathrm{arctg}3,\ k\pi+\mathrm{arctg}7\mid k\in Z\}$；

5) $\left\{k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\mathrm{arctg}3\mid k\in Z\right\}$

第二章

3. 1) $\frac{\pi}{6}$；2) $\frac{\pi}{4}$；3) $-\frac{\pi}{4}$；4) $-\frac{\pi}{3}$；5) $\arcsin\frac{3}{4}$

6. 1) $k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3},k\in Z$；

2) $k\pi+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6},k\in Z$；

3) $2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$；

4) $k\pi+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4},k\in Z$

7. 1) $k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{1}{3},k\in Z$；

2) $k\pi+(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3},k\in Z$；

3) $k\pi+(-1)^k\arcsin 0.6,k\in Z$

12. 1) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},k\in Z$；2) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6},k\in Z$；

3) $2k\pi\pm\frac{3\pi}{4},k\in Z$; 4) $2k\pi\pm\frac{5\pi}{6},k\in Z$

13. 1) $2k\pi\pm\arccos\frac{4}{5},k\in Z$;

2) $2k\pi\pm(\pi-\arccos\frac{4}{5}),k\in Z$;

3) $2k\pi\pm\arccos 0.6,k\in Z$

16. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$; 4) $-\mathrm{arctg}0.7$

19. 1) $k\pi,k\in Z$; 2) $k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$;

3) $k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z$; 4) $k\pi-\frac{\pi}{3},k\in Z$;

5) $k\pi+\mathrm{arctg}\sqrt{2},k\in Z$

20. 1) $k\pi-\mathrm{arctg}\frac{2}{3},k\in Z$; 2) $k\pi+\mathrm{arctg}2,k\in Z$;

3) $k\pi-\mathrm{arctg}1.5,k\in Z$

25. 1) $k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in Z$; 2) $k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z$;

3) $k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$; 4) $k\pi+\mathrm{arcctg}\frac{1}{2},k\in Z$

26. 1) $k\pi+\pi-\mathrm{arcctg}2,k\in Z$;

2) $k\pi+\mathrm{arcctg}0.8,k\in Z$;

3) $k\pi+\pi-\mathrm{arc\,ctg}\frac{2}{3},k\in Z$

29. 1) $\left\{ k\pi+(-1)\frac{k\pi}{4} \mid k\in Z \right\}$;

2) $\left\{ k\pi+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} \mid k\in Z \right\}$;

3) $\left\{ k\pi+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} \mid k\in Z \right\}$

4) $\left\{ k\pi+(-1)^{k}\frac{\pi}{3} \mid k\in Z \right\}$;

5) $\left\{ k\pi+(-1)^{k}\arcsin\frac{4}{5} \mid k\in Z \right\}$

32. 1) $((2k-1)\pi,\ 2k\pi)$, $k\in Z$;

2) $(2k\pi,\ (2k+1)\pi)$, $k\in Z$;

3) $\left(2k\pi-\frac{3\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in Z$;

4) $\left(2k\pi-\frac{5\pi}{6},\ 2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)$, $k\in Z$;

5) $\left(2k\pi-\frac{\pi}{6},\ 2k\pi+\frac{7\pi}{6}\right)$, $k\in Z$;

6) $\left(2k\pi-\frac{\pi}{3},\ 2k\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$, $k\in Z$;

7) $\left(k\pi-\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$, $k\in Z$;

8) $\left(2k\pi+\frac{\pi}{6},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)$, $k\in Z$

35. 1) $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in Z\right\}$;

2) $\left\{2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \mid k \in Z\right\}$;

3) $\left\{2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \mid k \in Z\right\}$;

4) $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \mid k \in Z\right\}$;

5) $\{2k\pi \pm (\pi - \arccos 0.3) \mid k \in Z\}$

39. 1) $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2},\ 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$, $k \in Z$;

2) $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2},\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in Z$;

3) $((2k-1)\pi,\ (2k+1)\pi)$, $k \in Z$;

4) $(2k\pi,\ (2k+1)\pi)$, $k \in Z$;

5) $\left(2k\pi + \frac{\pi}{3},\ 2k\pi + \frac{5\pi}{3}\right)$, $k \in Z$;

6) $\left(2k\pi - \frac{\pi}{3},\ 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)$, $k \in Z$;

7) $\left(k\pi + \frac{\pi}{3},\ k\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$, $k \in Z$

42. 1) $\left\{k\pi - \frac{\pi}{6} \mid k \in Z\right\}$; 2) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in Z\right\}$;

3) $\{k \cdot 180° + 53° \mid k \in Z\}$

44. 1) $\left\{k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\in Z\right\}$;

2) $\left(k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in Z$;

3) $\left(k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$, $k\in Z$

47. 1) $\left\{k\pi+\frac{\pi}{4}\ |k\in Z\right\}$;

2) $\left\{k\pi+\frac{5\pi}{6}\ |k\in Z\right\}$;

3) $\left\{k\pi+\frac{2\pi}{3}\ |k\in Z\right\}$;

4) $\{k\cdot180^\circ+26^\circ\ |k\in Z\}$

49. 1) $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},\ k\pi\right)$, $k\in Z$;

2) $\left(k\pi,\ k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$, $k\in Z$;

3) $\left(k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$, $k\in Z$;

4) $\left(k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$, $k\in Z$

51. 1) $\left\{2k\pi+2(-1)^k\arcsin\frac{1}{4}-\frac{\pi}{3}\mid k\in Z\right\}$;

2) $\left\{ \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \mid k \in Z \right\}$;

3) $\left\{ \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \mid k \in Z \right\}$;

4) $\left\{ k + \frac{(-1)^k}{4} \mid k \in Z \right\}$;

5) $\{ \pm\sqrt{2\pi |k|} \mid k \in Z \}$;

6) ϕ

53. 1) $\left(k\pi - \frac{5\pi}{12},\ k\pi - \frac{\pi}{12}\right)$, $k \in Z$;

2) $\left(4k\pi - \frac{4\pi}{3},\ 4k\pi + \frac{4\pi}{3}\right)$, $k \in Z$;

3) $\left(3k\pi,\ 3k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$, $k \in Z$;

4) $\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12},\ \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$, $k \in Z$

55. 1) $\left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{4} \mid k \in Z \right\}$; 2) $\left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{2} \mid k \in Z \right\}$;

3) $\left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in Z \right\}$; 4) $\{ k\pi \mid k \in Z \}$

57. 1) $\{ k\pi \mid k \in Z \}$; 2) $\left\{ k\pi \pm \frac{\pi}{4} \mid k \in Z \right\}$;

3) $\left\{ k\pi \pm \arccos\frac{1}{3} \mid k \in Z \right\}$;

4) $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$

59. 1) $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{4} \mid k \in Z\right\}$; 2) $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{6} \mid k \in Z\right\}$;

3) $\left\{k\pi \pm \frac{\pi}{6} \mid k \in Z\right\}$

61. 1) $\left\{2k\pi,\ 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in Z\right\}$;

2) $\{(2k+1)\pi \mid k \in Z\}$;

3) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \text{arcctg}0.6 \mid k \in Z\right\}$

63. 1) $\{k\pi + \text{arctg}1.5 \mid k \in Z\}$;

2) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \text{arctg}5 \mid k \in Z\right\}$;

3) $\{k\pi, k\pi + \text{arctg}2 \mid k \in Z\}$

64. 1) $\left\{2k\pi - \frac{\pi}{2},\ 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right\}$, $k \in Z$;

2) $\left(2k\pi - \frac{\pi}{4},\ 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, $k \in Z$;

3) $\left(2k\pi - \frac{\pi}{4},\ 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right)$, $k \in Z$;

4) $\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6},\ 2k\pi + \frac{7\pi}{6}\right)$, $k \in Z$;

5) $\left(k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$, $k \in Z$;

6) $\left(k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi+\pi\right)$,$k\in Z$

65．1) $\{k\pi\mid k\in Z\}$；2) $\left\{k\pi+\frac{3\pi}{4}\mid k\in Z\right\}$；

3) $\left\{\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\mid k\in Z\right\}$；4) $\left\{k\pi, k\pi-\frac{\pi}{4}\mid k\in Z\right\}$；

5) $\left\{k\pi+\frac{\pi}{4}\mid k\in Z\right\}$，6) $\left\{2k\pi\mid k\in Z\right\}$

66．1) $\left\{k\pi\pm\frac{\pi}{4}\mid k\in Z\right\}$；2) $\left\{k\pi\pm\frac{\pi}{6}\mid k\in Z\right\}$；

3) ϕ；4) $\left\{(2k+1)\pi, \frac{\pi}{3}(6k+1)\mid k\in Z\right\}$

67．1) $\{k\pi\mid k\in Z\}$；2) $\left\{k\pi+\frac{\pi}{4}, k\pi\mid k\in Z\right\}$；

3) ϕ； 4) $\left\{k\pi-\frac{\pi}{4},\ k\pi\pm\frac{\pi}{3}\mid k\in Z\right\}$

68．1) $\{k\pi+\mathrm{arctg}3,\ k\pi+\mathrm{arctg}7\mid k\in Z\}$；

2) $\left\{k\pi-\frac{\pi}{4},\ k\pi+\mathrm{arctg}\frac{3}{4}\mid k\in Z\right\}$

小测验

第一组 1) $((2k-1)2\pi,\ 4k\pi)$，$k\in Z$；

2) $\{(2k+1)\pi\mid k\in Z\}$；

3) $\left\{\frac{k\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{18}\mid k\in Z\right\}$；

4) $\left\{k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ |k\in Z\right\}$；

5) $\left\{k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi-\mathrm{arctg}\frac{3}{2}\ |k\in Z\right\}$

第二组 1) $\left(k\pi,\ k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)$，$k\in Z$；

2) $\left\{2k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\middle|\ k\in Z\right\}$，

3) $\left\{\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\pi\ |k\in Z\right\}$；

4) $\left\{2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ |k\in Z\right\}$；

5) $\left\{k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi-\mathrm{arctg}\frac{5}{3}\middle|\ k\in Z\right\}$

第三章

2. 1) $\frac{0.24}{25}$； 2) $-\frac{13}{85}$，$\frac{77}{85}$； 3) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$，

$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

3. $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$， $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$， $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

5. 1) $\frac{71}{98}$; 2) 1

7. 1) $\sin\frac{\pi}{12}$; 2) $\sin\frac{\pi}{12}$

9. 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $2+\sqrt{3}$; 3) $-2-\sqrt{3}$;
4) $\sqrt{3}$; 5) $2-\sqrt{3}$

11. 1) $\frac{3}{11}$; 2) $\frac{5}{12}$

13. 1) $2\cos\alpha\sin\beta$; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $\cos^2\alpha$;

4) $\mathrm{tg}\alpha$; 5) $\mathrm{ctg}\alpha$; 6) $2\mathrm{tg}2\alpha$

17. 1) $\{k\pi \mid k\in Z\}$;
2) $\{k\pi+\mathrm{arcctg}4\sqrt{3} \mid k\in Z\}$;
3) $\{k\pi+\mathrm{arctg}6\sqrt{3} \mid k\in Z\}$

18. 1) $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{117}{125}$;

2) $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$

19. 1) $\frac{1}{5}$; 2) 5

20. 1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 2) $\sin^2\alpha$

25. 1) $\left\{ 2k\pi - \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in Z \right\}$;

2) $\left\{ (2k+1)\frac{\pi}{6} \;\middle|\; k \in Z \right\}$;

3) $\left\{ \frac{k\pi}{2} \;\middle|\; k \in Z \right\}$;

4) $\{ k\pi \mid k \in Z \}$

小测验

第一组　1) -1;　　2) $\frac{140}{221}$;

5) $\left\{ k\pi + \frac{\pi}{6} \;\middle|\; k \in Z \right\}$

第二组　1) $\frac{4}{5}$;　　2) $\frac{21}{221}$;

5) $\left\{ \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \;\middle|\; k \in Z \right\}$

27. 1) $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$,　$\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$,　$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{7}$;

2) $\sin 2\alpha = -\frac{120}{169}$,　$\cos 2\alpha = \frac{119}{169}$,　$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{120}{119}$

3) $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$,　$\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$,

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$

28. 1) $\operatorname{ctg} z = -\frac{8}{15}$;

2) $\sin 3\alpha = \frac{120}{169}$, $\cos 3\alpha = \frac{119}{169}$, $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{120}{119}$;

3) $\cos 4x = \frac{119}{169}$, $\operatorname{tg} 4x = \frac{120}{119}$

29. 1) $-\frac{3}{5}$; 2) $-\frac{7}{15}$

31. 1) $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$;

2) $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha$;

3) $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$;

4) $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$;

5) $\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$

33. 1) $\left\{k\pi,\ 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \,\middle|\, k \in Z\right\}$;

2) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \,\middle|\, k \in Z\right\}$;

3) $\{k\pi \mid k \in Z\}$

35. 1) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3}$;

2) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{5\sqrt{34}}{34}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{5}$

3）$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\text{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$

36. 1）$-\frac{2}{\sqrt{13}}$；2）$-\frac{3}{\sqrt{13}}$；3）$\frac{1}{11}$

39. 1）$-\sin\frac{8x}{3}$；　2）$-\sin 3x$；

3）$\sin 5x$；　4）$\sin x$

41. 1）$2\sin^2 20°$；2）$\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}$；3）$\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$；

4）$\sin 2\alpha$；　5）$\sin 2\alpha$；　6）1

44. 1）$\frac{3}{5}$；2）$-\frac{3}{5}$；3）$-\sqrt{3}$；　4）$\frac{1}{7}$

46. 1）$\left\{2k\pi,\ 2k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3}\ \middle|\ k\in Z\right\}$；

2）$\left\{(2k+1)\pi,(6k\pm 1)\frac{2\pi}{3}\ \middle|\ k\in Z\right\}$；

3）$\left\{(2k+1)\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\ \middle|\ k\in Z\right\}$

47. 1）$\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$，$\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$，$\text{tg}2\alpha=-\frac{24}{7}$；

2）$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$和$\frac{\sqrt{3}}{3}$；3）$\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\frac{\sqrt{10}}{10}$和3

48. 1）$0.5\text{tg}2\alpha$；2）1；3）$\cos 2\alpha$；4）$2\text{ctg}\alpha$

49. 1）$\frac{1}{2}$；　2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；　3）$\frac{1}{8}$

50. 1) $\dfrac{720}{1681}$; 2) $-\dfrac{1}{9}$; 3) $\dfrac{175}{288}$

51. 1) $\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right|$; 2) $\mathrm{ctg}^2\alpha$; 3) 1;

4) $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\alpha$

54. 1) $\left\{\dfrac{k\pi}{2}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}\,\middle|\,k\in Z\right\}$;

2) $\left\{k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}\,\middle|\,k\in Z\right\}$;

3) $\left\{\dfrac{k\pi}{2}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}\,\middle|\,k\in Z\right\}$;

4) $\left\{k\pi-\dfrac{\pi}{4},n\pi+\mathrm{arctg}(2\pm\sqrt{3})\,\middle|\,k,n\in Z\right\}$;

5) $\{k\pi\mid k\in Z\}$;

6) $\{4k\pi,(2k+1)\pi\mid k\in Z\}$;

7) $\{2k\pi,(4k+1)\pi\mid k\in Z\}$;

8) $\left\{(2k+1)\pi;\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\,\middle|\,k\in Z\right\}$

小测验

第一组 1) $\sin2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos2\alpha=\dfrac{1}{2}$,

$\mathrm{tg}2\alpha=-\sqrt{3}$;

2) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$和$-\dfrac{1}{2}$;

5）$\left\{2k\pi,\ 2n\pi+\frac{2\pi}{3}\ \middle|\ k,\ n\in Z\right\}$

第二组　1）$\sin2\alpha=\frac{24}{25}$，$\cos2\alpha=-\frac{7}{25}$，

$\mathrm{tg}2\alpha=-\frac{24}{7}$；

2）$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$和$\frac{\sqrt{3}}{3}$；5）$\left\{2k\pi\ \middle|\ k\in Z\right\}$

56. 1）$\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{2}\cos12x$；

2）$\frac{1}{2}\cos10x-\frac{1}{2}\cos12x$；

3）$\frac{1}{2}\sin3x+\frac{1}{2}\sin7x$；

4）$\frac{1}{2}\sin2\alpha-\frac{1}{2}\sin2\beta$；

5）$\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos(3\alpha+2\beta)$；

6）$\frac{1}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos y+\frac{1}{4}\cos(x+y)+\frac{1}{4}$

57. 1）$\frac{1}{2}\cos2x$；　2）$\sqrt{3}+2\cos2x$；

3）$\cos2x+\sqrt{3}\sin2x+\sqrt{3}$；

4）$2-\cos2x-\sqrt{3}\sin2x$

59. 1) $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$;

2) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$;

3) $\frac{5}{8}\sin x-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{1}{16}\sin 5x$

61. 1) 1;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$;

3) $2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\sqrt{3}\cos 10^\circ$;

5) $\frac{\sin 10^\circ}{\cos 15^\circ\cos 25^\circ}$; 6) $\sin 8\alpha\cdot\sin 2\alpha$

63. 1) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$;

2) $\cos 10^\circ$

65. 1) $4\sin 8^\circ\sin 13^\circ\sin 21^\circ$;

2) $4\sin\frac{A+B}{2}\cos\left(\frac{A+B}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

$\cos\left(\frac{A-B}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $4\cos\alpha\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$;

4）$4\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{C}{2}\right)$；

5）$4\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$

6）$4\sin31^\circ\cos5^\circ\cos1^\circ$

69．1）$2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$；

2）$4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$；

3）$2\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$；

4）$4\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$；

5）$\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$；　　6）$\frac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha}$；

7）$-\frac{\cos2\alpha}{\sin^2\alpha}$；

8）$4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$；

9）$2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$；

10）$2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$；

11） $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$ ，这里$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$；

12） $2\sqrt{a}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$ ， 这里$\varphi=\arccos\frac{b}{a}$

71\. 1） $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ ； 2） $5\sin(\alpha-36°52')$；

3） $3\sin(\alpha+48°10')$

73\. 1） $\left\{k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\ \middle|\ k\in Z\right\}$；

2） $\left\{2k\pi+\frac{\pi}{3}\ \middle|\ k\in Z\right\}$；

3） $\left\{k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\ \middle|\ k\in Z\right\}$

75\. 1） $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{12},\ k\pi\ \middle|\ k\in Z\right\}$；

2） $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{12}\ \middle|\ k\in Z\right\}$；

3） $\{k\pi\mid k\in Z\}$； 4） $\{180°k+45°\mid k\in Z\}$

77\. $y=5\sin(6\pi t+0.8)$

79\. 1） $R=2$， $T=\frac{2\pi}{3}$， $\theta=\frac{\pi}{3}$；

2） $R=\frac{1}{3}$， $T=2$， $\theta=-\frac{\pi}{4}$；

3） $R=1$， $T=2\pi$， $\theta=-5$

80. $\frac{5\pi^2 m}{18}$

81. 1） $13\sin(2t+\operatorname{arctg}\frac{5}{12})$；

2） $17\sin(5x+\frac{\pi}{6}-\operatorname{arctg}\frac{15}{8})$

82. 1） 8，0； 2） $2\sqrt{3}$，$\frac{\pi}{6}$； 3） 2，$\frac{\pi}{4}$

83. 1） $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha$；

2） $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\sin4\alpha$；

3） $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cos4\alpha$

84. 1） $\frac{3}{16}$； 2） 3

85. 1） $\left\{k\pi+\frac{\pi}{6}\,\middle|\,k\in Z\right\}$； 2） $\left\{\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\,\middle|\,k\in Z\right\}$

88. 1） $4\sin3\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$； 2） $4\sin2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$

90. 1） $E(y)=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$；

2） $E(y)=[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$；

3） $E(y)=[-2,2]$

小测验

第一组 1） $\sin1°$； 4） $\left\{\frac{k\pi}{2}\,\middle|\,k\in Z\right\}$；

5） $\left\{\frac{k\pi}{2},\ n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\,\middle|\,k,n\in Z\right\}$

第二组　1）$\sqrt{3}\cos 25°$；　4）$\left\{\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\middle| k\in Z\right\}$；

5）$\left\{\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\middle| n\in Z\right\}$

第四章

4. （11，1）

5. 顶点为（－5，1），（1，3），（2，－2）的三角形

7. 1）7；2）9

8. 1）和2）

11. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$

14. $R=12.6$牛顿；$\alpha=11°28'$，$\beta=18°32'$

16. 1）$m=\pm 1$；2）$|m|>1$；3）$|m|<1$

17. 1）$\frac{2}{|\boldsymbol{a}|}$；　2）$-\frac{3}{|\boldsymbol{a}|}$；　3）$-\frac{n}{|\boldsymbol{a}|}$

18. 1）$\frac{1}{2}$；　2）-1；　3）2

19. $\overrightarrow{CM}=-0.5\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

22. $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OD}=-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OE}=-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

24. 1）4；　2）0

28. 1）$Prj_n\boldsymbol{a}=Prj_n\boldsymbol{b}$；　2）$Prj_n\boldsymbol{a}=-Prj_n\boldsymbol{b}$

29. $l\perp\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

31. 1）$\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{a}|$；　2）$-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|$；　3）$-\frac{\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{a}|$

35. 1）（6，1）；　2）（3，－2）

36. 1）（3，－3）；2）（－5，2）；3）（0，2）；

4) (−4, −6); 5) (−9, −4); 6) (−6, −13)

38. 1) $-2i-4j$;　　2) $-i-8j$

39. $\overrightarrow{AB}=4i+7j$; $\overrightarrow{BC}=3i-3j$, $\overrightarrow{CA}=-7i-4j$

41. 1) $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$;　2) $\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$不共线; 3) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$

43. $|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{BC}|=5\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{CA}|=10$

44. $|a|=13$

45. 1) $15+5\sqrt{5}$;　2) $18+2\sqrt{17}$

48. 1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\beta=\frac{12}{13}$;

2) $\cos\alpha=-0.8$, $\cos\beta=0.6$

49. $O_1(2, -1)$

50. $O_1(4, -1)$

51. $O_1(4, -3)$, $r=13$

52. $M_1(-2, 0)$, $M_2(22, 0)$

53. $B_1(0, -5)$, $B_2(0, 3)$

54. 1) (0, −3);　　2) (0, 5)

55. 1) (1, 0); 2) (−4, 0)

56. 1) $M_1(-13, -13)$和$M_2(-5, -5)$;

2) $M_1(2, 2)$和$M_2(10, 10)$

57. $M_1(5, 2)$和$M_2(5, 10)$

58. $M_1(-5, 10)$和$M_2(7, 10)$

59. 1) $C(2, -1)$; 2) $C(2, -5)$

60. $C(5, 6)$

61. $C(6, 4)$

62. $C_1(5, -4)$和$C_2(8, -7)$

64. (−2, −0.5), (2, 1.5)

65. $B(9, 1)$

68. 1) $(-2, 1)$; 2) $(-\frac{2}{3}, 2)$

69. $C(-2, -2)$, $D(4, 1)$

70. $(-3, -1)$, $(1, 0)$, $(5, 1)$, $(9, 2)$

71. $A(6, 8)$ 72. $A(-18, 9)$

73. $B(2, -1)$ 75. $C(4, -9)$

76. $C(9, 5)$ 78. 409

79. $16-12\sqrt{3}$ 81. 1) 12; 2) $\frac{2}{3}$

82. -85 83. 1) -26; 2) -25

85. $16°16'$ 86. $\frac{11}{25}\sqrt{5}$

88. 1) 是; 2) 是; 3) 不是 89. $|a| = |b|$

91. 11(功的单位)

93. 1) $(-5, 9)$; 2) $(2, 2)$; 3) $(-3, 1)$; 4) $(0, 5)$

95. 1) $(-5, -5)$; 2) $(1, -5)$; 3) $(-5, 1)$;
4) $(1, -1)$

97. $O(4, 4)$, $O_1(-4, -4)$ 98. $(3, -5)$

99. 点的横坐标和纵坐标互换位置

101. 1) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$; 2) $(2\sqrt{3}-1, -2-\sqrt{3})$

103. 1) $(2, 2\sqrt{3})$; 2) $(0, 4)$

106. 1) $(2, -\frac{3\pi}{4})$, $(4, -\frac{\pi}{3})$, $(1, \frac{5\pi}{6})$;

2) $(2, -\frac{\pi}{4})$, $(4, -\frac{2\pi}{3})$, $(1, \frac{\pi}{6})$

108. 1）$(0,2)$；2）$(\sqrt{3},-3)$；3）$(1,-1)$；
4）$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

110. 1）$(5,\frac{\pi}{2})$；2）$(\sqrt{3},\frac{\pi}{2})$；3）$(2,-\frac{5\pi}{6})$；
4）$(\sqrt{2},-\frac{\pi}{4})$

111. 可以，如果点在OX正半轴上的话

113. $\sqrt{31}\approx5.6$

124. 1）$(2,3)$；2）$(-2,3)$；3）$(2,-3)$；
4）$(-3,-2)$

125. 1）$(3,-1)$和$(1,-7)$；2）$(-3,-1)$和$(-1,-7)$；
3）$(3,1)$和$(1,7)$；4）$(-1,3)$和$(-7,1)$

126. 1）$(-3,-2)$，$(-7,-4)$和$(-1,-6)$；
2）$(3,-2)$，$(7,-4)$和$(1,-6)$；3）$(-3,2)$，
$(-7,4)$和$(-1,6)$；4）$(2,3)$，$(4,7)$
和$(6,1)$

127. 13

128. $(6,-2)$，$(-2,4)$，$(-6,-6)$

129. $C(-5,-3)$

130. $B(-7,1)$

131. $(0,9.6)$

132. 10

133 10

134. $A(-8,-3)$

135. $(-3,-3)$

136. $D(6,-3)$

137. $D(-2,-2)$

138. $C(5,-5)$，$D(1,-7)$

小测验

第一组 1）$\overrightarrow{AB}=(3,7)$；2）$A(4,4)$；3）$M_1(2,-2)$，
$M_2(10,-10)$；4）90°

第二组 1）$\overrightarrow{AB}=5i+9j$；2）$C(4,-3)$；3）$C(8,-2)$；

4）$\frac{63}{65}$

第五章

3. 1）(－4, 0)和（0, －5)； 2）(－2, 0) 和 (0, 7)

10. 1） 6平方单位； 2）20平方单位

12. 1）$y+4=0$； 2）$x+6=0$

13. $y=0$，$x=5$，$y=3$和$x=0$

14. 1）$y=0$，$x=-4$，$y=-3$，$x=0$；

 2）$x=2$，$y=0$，$x=5$，$y=3$

16. 1）$4x-5y-7=0$； 2）$3x-4y-7=0$

17. 1）$2x+y+7=0$； 2）$5x-2y-6=0$；

 3）$x-4y-10=0$

19. 1）$x-4y=0$； 2）$4x+5y=0$

21. 15

23. 1）(2, －1)； 2）(－4, －2)

27. 1）$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$； 2）$\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{-\frac{1}{3}}=1$

 3）$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$； 4）$\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$

29. 1）$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$； 2）$\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$

30. 1）10； 2）20； 3）15

31. 1）(2, 0) 和 (0, －6)； 2）(2, 0)和 (0, 4)；

 3）(－5, 0)和(0, －5)

37. 1）30°； 2）120°； 3）78°41′； 4）108°26′

38. 1）81°52′； 2）135°； 3）22°18′； 4）109°05′

40. 1）$149°02'$； 2）$70°59'$

42. 1）$x+y=0$； 2）$4x-y=0$

44. $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$

46. 1）$\sqrt{3}x-y=0$； 2）$\sqrt{3}x-3y=0$； 3）$x+y=0$；
4）$3x-y=0$； 5）$5x+y=0$

47. 1）$y=x+3$； 2）$y=-\sqrt{3}x+3$； 3）$y=3x+3$

48. 1）$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$； 2）$y=-x-2$； 3）$y=2x-2$

50. 1）$2x+y=0$； 2）$5x-y=0$

52. 1）$P(4, 3)$； 2）$(0, 0)$，$(12, 0)$，$(12, 16)$
和$(0, 16)$

54. $y=-2x-12$ 56. 1）$y=-2x+3$； 2）$y=-x-5$

58. 1）$x-y=0$； 2）$2x+y-4=0$

60. 1）$3x+y-7=0$； 2）$x-y+1=0$； 3）$x+y-5=0$

62. 1）$x-y=0$； 2）$4x+3y-12=0$

63. 1）$7x-4y+13=0$（AB），$9x+7y-44=0$（BC），
$2x+11y+28=0$（AC）；
2）$2x-y-1=0$，$5x+y-20=0$和$3x-5y-12=0$

64. 1）$x+y-1=0$； 2）$x-2y-2=0$

66. 1）$\text{arctg}0.8\approx38°39'$； 2）$180°-\text{arctg}3\approx108°26'$

68. 1）$a=5$，$b=-5$； 2）$(0, 3)$

70. 1）$x-y+3=0$； 2）$x+y-2=0$

72. 1）$(-1, -3)$； 2）$(4, -2)$

74. 1）$(-2, -4)$，$(5, 2)$和$(-5, 0)$；
2）$(4, 1)$，$(-3, -3)$，$(1, 6)$

76. 1) $3x-2y-13=0$; 2) $4x+5y-6=0$

78. 1) $\mathrm{arctg}2\approx 63°26'$; 2) $\mathrm{arctg}\frac{7}{9}\approx 37°52'$;

3) $\mathrm{arctg}\frac{14}{23}\approx 31°20'$

80. $\arccos\frac{13}{85}\approx 81°12'$ 82. $\arccos\frac{63}{65}\approx 14°16'$

83. 1) $\approx 67°23'$, $\approx 56°19'$, $\approx 56°19'$;
2) $\approx 76°16'$, $\approx 43°45'$, $\approx 59°59'$;
3) $\approx 72°21'$, $\approx 58°28'$, $\approx 49°11'$

84. 1) $\approx 53°08'$; 2) $\approx 46°51'$

85. $\mathrm{arctg}\frac{25}{21}\approx 49°58'$

87. 1) $\angle A\approx 25°46'$, $\angle B\approx 23°38'$, $\angle C\approx 130°36'$;
2) $\angle A\approx 67°23'$, $\angle B=\angle C\approx 59°19'$

88. $\mathrm{arctg}0.5=26°34'$ 89. $\mathrm{arctg}0.75\approx 36°52'$

90. 1) $\approx 29°45'$; 2) $\approx 48°22'$; 3) $\approx 82°52'$

91. $\mathrm{arctg}\frac{27}{47}\approx 29°53'$ 92. $\mathrm{arctg}0.5714\approx 29°45'$

93. $\mathrm{arctg}\frac{5}{7}\approx 35°32'$ 94. $45°$

96. 1) $2x-y+9=0$和$11x-2y+32=0$;
2) $y=0$和$x=0$; $(-1, 0)$和$(0, 1)$

97. $y=2x$和$y=7x$; $y=\frac{1}{7}x$ 和 $y=\frac{1}{2}x$

98. 1) $y=-3x$ 和 $y=-\frac{2}{3}x$; 2) $y=-\frac{3}{2}x$ 和 $y=-\frac{1}{3}x$

100. $y+2=0$　　101. 1), 2), 3) 中的两直线平行

102. $a=10$

104. 1) $5x-3y+21=0$;　　2) $3x+4y+19=0$

105. 1) $7x+5y+26=0$;　　2) $x-6y-25=0$

106. 1) $x-4y+6=0$;　　2) $x-2y+2=0$

107. 1), 3), 4) 中的两直线垂直

108. $k=-\frac{1}{5}$

110. 1) $2x+5y+7=0$;　　2) $5x+6y+14=0$;

3) $3x-2y=0$

111. $5x-9y+26=0$　　112. $x+y+3=0$ 和 $x-y-3=0$

113. $x+3y=0$　　114. $x-y-5=0$

115. $2x-3y+10=0$

116. 1) $4x+2y-9=0$;　　2) $2x-3y+1=0$

117. $7x+3y+20=0$

118. 1) $10x+3y+2=0$, $5x+9y+3=0$ 和 $5x-6y=0$;

2) $x+y+10=0$, $15x+4y-18=0$ 和

$10x-y-68=0$;

3) $11x-9y-26=0$, $9x-2y-64=0$ 和

$2x-7y+38=0$

119. 1) $2x-11y-29=0$, $5x-3y+10=0$ 和

$3x+8y+39=0$;

2) $x+2y-5=0$, $x-y=0$ 和 $2x+y-5=0$

3) $4x-5y+4=0$, $3x+4y+14=0$ 和

$10x+3y+32=0$

121．1）5；2）10　　123．1）10；2）13

124．$k=2$　　125．$(-2,-7)$

126．$x-6y=0$，$3x-2y=0$　　127．$x-6y=0$，$2x-3y=0$

128．$8x-11y+2=0$，$5x-2y-15=0$

129．$9x+11y+24=0$　　130．$(6,2)$

131．$5x-12y=0$　　132．$8x-15y+11=0$

133．$4x-y+36=0$，$x+4y-25=0$

134．$4x+5y-16=0$，$4x+5y+25=0$

135．1）$2x-3y+4=0$；　2）$3x-11y-7=0$；

3）$3x+2y-7=0$；　4）$45°$和$90°$；　5）$\left(\frac{7}{3},0\right)$

136．$x-y-1=0$　　137．$14x+7y-20=0$

138．$9x+2y-85=0$，$7x-6y-51=0$，$x+4y-17=0$

139．$x-3y-3=0$，$3x-2y-16=0$，$x+4y-10=0$，$5x-8y-6=0$

140．$x-3y+8=0$，$5x-3y-32=0$，$5x-9y+4=0$，$x+6y-13=0$

141．$2x-y+3=0$，$2x-y-7=0$，$x+2y-1=0$，$x+2y-11=0$，$3x+y-8=0$和$x-3y+4=0$

142．$3x-y+3=0$，$x+3y-19=0$

143．$3x-y+1=0$和$x+3y-13=0$

小测验

第一组　1）$4x-3y+37=0$；2）$4x+5y+13=0$；

3）$3x-4y-10=0$；　4）$\operatorname{arctg}\frac{48}{11}\approx 77°5'$；

5）$x+1=0$

第二组　1）$x-2y+18=0$；2）$y-4=0$；

3） $x-3y+2=0$； 4） $\mathrm{arctg}\frac{21}{13}\approx 58°11'$；

5） $(-\frac{2}{3}, 4)$

第六章

2． $x-y-4=0$

4． $x^2+y^2-3x=0$

5． $x^2+y^2=16$

6． $2x^2+2y^2-25=0$

8． $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

9． $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

11． $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{72}=1$

12． $x^2+4y+4=0$

13． $y^2-6x+9=0$

14． 1） $y^2-6y+12x-3=0$； 2） $x^2+6x-12y+21=0$

15． $x^2-4x+2y+5=0$

16． $x^2-y^2+6x-8y+25=0$

17． $x^4-y^4=y^2(x-1)^2$

18． $x^2+y^2-xy=0$

19． $xy-5x-8y+28=0$

20． 1） 点A属于，点B和点C不属于；

2） 点K属于，点L不属于

22． 1） $x^2+y^2=3$； 2） $(x+2)^2+(y+5)^2=9$

24． 1） $(x+1)^2+(y-4)^2=17$； 2） $(x+3)^2+y^2=41$

25． 1） $(x-3)^2+(y+2)^2=34$； 2） $x^2+(y-4)^2=5$

26． 1） $(x-3)^2+(y-4)^2=25$； 2） $(x+4)^2+(y-5)=41$

27． 1） $(x+2)^2+(y-3)^2=13$；

2） $(x-3)^2+(y+5)^2=34$

29． $(2, 0)$，$(-6, 0)$，$(0, 3)$和$(0, -4)$

31. (1, 5)和(7, −3)

33. 1) $(x+4)^2+y^2=100$; 2) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

34. 1) $(x-3)^2+(y-2)^2=25$; 2) $x^2+(y+3)^2=25$;

3) $(x-2)^2+(y+3)^2=100$

36. $(x-5)^2+(y-4)^2=25$和$(x+5)^2+(y-4)^2=25$

38. $(x-3)^2+(y-5)^2=5^2$和$(x-27)^2+(y-29)^2=29^2$

40. $(x-29)^2+(y-29)^2=29^2$和$(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$

41. $x^2+y^2=25$

42. $(x-4)^2+y^2=41$

43. $x^2+(y-2)^2=34$

45. 1) $(x+4)^2+(y+3)^2=42$; 2) $(x-1)^2+(y+2)^2=20$

47. $(x+1)^2+(y+4)^2=25$

48. $(x-3)^2+(y-2)^2=13$

49. $(x+2)^2+(y+1.5)^2=6.25$

51. 1) $O_1(-3, 5)$, $r=\sqrt{21}$; 2) $O_1(0, -6)$, $r=7$;

3) $O_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $r=\frac{7}{2}$

52. 1) $O_1\left(-\frac{7}{3}, 3\right)$, $r=5$; 2) $O_1(2, 5)$, $r=0$(圆不存在); 3) $O_1(-3, -7)$, $r=\sqrt{-23}$(圆不存在)

53. 1) 10; 2) $\sqrt{157}$

54. 1) $4x-3y-10=0$; 2) $4x-7y+29=0$

55. $\sqrt{3}x-y+3\sqrt{3}+2=0$

56. $x+y+1=0$

57. $5x+y-21=0$

58. $3x+2y=0$

59. 1) $5x+2y-13=0$; 2) $x-y-3=0$

60. 1) $3x-4y-32=0$;　　2) $2x+5y+4=0$

61. 1) $y=2x$;　　2) $7x+y-17=0$

62. 1) $(x+2)^2+(y-1)^2=100$; 2) $(x-1)^2+(y+3)^2=97$

64. 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;　　2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

66. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;　　2) $\frac{x^2}{89}+\frac{y^2}{64}=1$

68. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$

70. 1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$;　　2) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$

72. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{28}=1$

74. 1) $(-5, 0)$, $(5, 0)$, $(0, -3)$ 和 $(0, 3)$;
　　$2a=10$和$2b=6$;
　2) $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -9)$和$(0, 9)$;
　　$2a=18$和$2b=8$; 椭圆的焦点在OY轴上

76. 1) $(-3, 0)$和$(3, 0)$; $2c=6$;
　2) $(0, -4)$和$(0, 4)$; $2c=8$

78. 1) $e=\frac{4}{5}$;　　2) $e=\frac{3}{4}$

80. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{24}=1$　　81. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

83. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;　　2) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

84. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$;　　2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

85．1）$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$；　2）$\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{225}=1$

87．1）$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$；　2）$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$

89．1）(12，3)和(9，4)；2）(4，1.8)和(3，2.4)

90．$\sqrt{17}$　　91．$\sqrt{245}\approx15.6$

93．$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{400}=1$　　95．$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$

96．$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

98．(−6，0)和(6，0)，$(-5\sqrt{2}，0)$和$(5\sqrt{2}，0)$

99．1）$2a=10$，$2b=14$；　2）$2a=4\sqrt{3}$，$2b=18$

100．(−6，0)和(6，0)；$2c=12$

101．1）$2c=16$；　2）$2c=12$

103．1）$e=\frac{4}{3}$；　2）$e=\frac{7}{5}$

105．1）$y=\pm\frac{3}{4}x$；　2）$y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$

107．1）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$；　2）$\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{9}=1$

109．$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{32}=1$

110．1）$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$　　2）$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$

112. 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 和 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；

2) $\frac{x^2}{256}-\frac{y^2}{144}=1$

114. 1) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$；　2) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{36}=1$

116. 1) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$；　2) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$

117. 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；2) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$；

3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$

119. 1) $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{9}=1$；2) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$；

3) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{9}=1$

120. 1) $x^2-y^2=9$；2) $x^2-y^2=60$

122. (0, －4)和 (0, 4), (0, －5) 和 (0, 5)，$e=\frac{5}{4}$，

$y=\pm\frac{4}{3}x$

123. $y^2-x^2=2$

125. 1) $y^2=20x$；2) $y^2=-16x$；3) $x^2=8y$；4) $x^2=-12y$

127. 1) $y^2=8x$；2) $y^2=-12x$；3) $x^2=16y$；4) $x^2=-4y$

129. 1) $y^2=1.8x$; 2) $y^2=-x$; 3) $y^2=-2x$

130. 1) $x^2=-\frac{4}{3}y$; 2) $x^2=9y$

132. 1) $x=-2$; 2) $x=\frac{9}{4}$; 3) $y=-1$; 4) $y=\frac{5}{2}$

134. 1) $(\frac{3}{2}, 0)$; 2) $(-1,0)$; 3) $(0,\frac{7}{2})$; 4) $(0,-\frac{5}{4})$

136. 1) $(-2, 0)$; 2) $(5, 0)$; 3) $(0, 4)$; 4) $(0, 6)$

138. 20　　140. 1) $(1, 4)$; 2) $(1, 2)$和$(4, 4)$

141. 1) $(0, 0)$和$(1, 1)$; 2) $(0, 0)$和$(9, 9)$

143. 1) $(y+2)^2=5(x+4)$; 2) $(y+4)^2=8(x+2)$;

3) $(y+1)^2=-\frac{2}{3}(x-3)$

145. 1) $(x-2)^2=16(y-4)$; 2) $(x-5)^2=5(y+5)$;

3) $(x-3)^2=-1.8(y-5)$

147. 1) $(y-6)^2=-24(x-4)$; 2) $(x-3)^2=8(y+2)$;

3) $(x+1)^2=-20(y-1)$

149. 1) $(y+3)^2=-16(x-1)$; 2) $(x+2)^2=24(y-4)$;

3) $(x+3)^2=-8(y-5)$

150. 1) $y^2=12(x-3)$; 2) $y^2=-24(x+4)$;

3) $x^2=8(y-2)$; 4) $x^2=12(y+2)$;

5) $x^2=-12(y+3)$

151. 1) $(y+1)^2=-16(x-2)$; 2) $y^2=8(x+2)$;

3) $(x-2)^2=12(y+1)$; 4) $x^2=-8(y-2)$

153. 1) $(3, -5)$; 2) $(-4, -1)$　　155. $(-2, -3)$

157. 1) $(-1, 4)$; 2) $(-3, 0)$

158. 1) $(-5, -4)$; 2) $(0, 0)$; 3) $(2, 8)$

160. 1) $y=5$; 2) $x=-8$

162. 1) $x=1.5$; 2) $x=0$; 3) $y=1.5$

166. 5　　167. 3

169. $63°26'$　　170. $85°14'$

172. $153°26'$

173. 1) $\operatorname{arctg}4\approx 76°$; 2) $\operatorname{arctg}2\approx 63°25'$

175. $99°28'$和$80°32'$　　176. 1) $45°$; 2) $135°$

178. 1) $23°28'$; 2) $60°$　　180. $x-y-6=0$, $x+y-2=0$

181. $6x-y+4=0$, $x+6y+13=0$

183. 1) $3x-4y+25=0$, $4x+3y=0$;

2) $12x-5y-169=0$, $5x+12=0$;

3) $2x-3y+25=0$, $3x+2y+18=0$;

4) $10x+3y+32=0$, $3x-10y+75=0$;

5) $x+y+2=0$, $x-y-6=0$;

6) $3x-2y+3=0$, $2x+3y-11=0$;

7) $2x-2y+3=0$, $2x+2y-9=0$

184. 1) $3x+y-\pi=0$, $3x-9y-\pi=0$;

2) $x-6y+3\sqrt{3}-\pi=0$, $12x+2y-\sqrt{3}-12\pi=0$;

3) $6x+2y-\pi=0$, $6x-18y-\pi=0$

186. $(-2, -12)$　　187. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

189. $(4, 2)$　　190. $(1, 3)$

192. $59°02'$　　194. 1) $36°52'$; 2) $34°42'$

195. $23°28'$　　196. $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

197. $\text{arctg}\,\frac{16}{13}$　　198. $\text{arctg}\,8$，$\text{arctg}\,\frac{8}{23}$

199. $3x-y-16=0$，$3x-y-4=0$，$x+3y+12=0$，$x+3y-28=0$

200. $(-2, -1)$，$(-2, 1)$，$(2, -1)$和$(2, 1)$

201. $(-\sqrt{3}, -1)$和$(\sqrt{3}, -1)$

202. $x=0$，$y=0$，$5x+3y-15=0$，$5x-3y+15=0$，$5x+3y+15=0$，$5x-3y-15=0$

203. 28.8平方单位　　204. 24平方单位

205. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$　　206. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

207. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$　　208. $(0, 0)$和$(3, 6)$

209. $y-2=0$　　210. $p=8$

小测验

第一组　1) $2x+5y+1=0$；2) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{44}=1$；

3) $e=\frac{4}{3}$；4) $y=1$；5) $y=-4$

第二组　1) $x-y+3=0$；2) $e=\frac{3}{5}$；3) $\frac{x^2}{729}-\frac{y^2}{1296}=1$；

4) $x=-3$；5) $x=5$

第七章

1. 1）同向：AD，BC和A_1D_1，AA_1和BB_1；

2）反向：AB和C_1D_1，AA_1和C_1C

2. 1）没有；2）没有

5. 1）27；2）13；3）21

8. 1）$\overrightarrow{BA}$；2）$\overrightarrow{AB}$；3）$\overrightarrow{0}$

9. 1）$\overrightarrow{BB_1}$；2）$\overrightarrow{CC_1}$；3）$\overrightarrow{AD}$；4）$\overrightarrow{D_1B}$

10. 1）$\overrightarrow{AC}$；2）$\overrightarrow{AA_1}$；3）$\overrightarrow{AA_1}$

17. 2），6），7）中的三个向量共面；1），3），4），5）中的三个向量不共面

19. 1）$\overrightarrow{AD_1}=0\cdot\boldsymbol{p}+1\cdot\boldsymbol{q}+1\cdot\boldsymbol{r}$；2）$\overrightarrow{AC}=1\cdot\boldsymbol{p}+1\cdot\boldsymbol{q}+1\cdot\boldsymbol{r}$；

3）$\overrightarrow{AM}=1\cdot\boldsymbol{p}+0\cdot\boldsymbol{q}+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}$；4）$\overrightarrow{AN}=1\cdot\boldsymbol{p}+\frac{1}{2}\boldsymbol{q}+1\cdot\boldsymbol{r}$；

5）$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7}\boldsymbol{p}+1\cdot\boldsymbol{q}+1\cdot\boldsymbol{r}$

20. $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}+3\overrightarrow{DM}$。提示：利用公式$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$（参看习题16）

21. 1）$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+0\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$；2）$\overrightarrow{MD}=1\cdot\boldsymbol{a}+1\cdot\boldsymbol{b}+1\cdot\boldsymbol{c}$；

3）$\overrightarrow{MN}=1\cdot\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

23. 1）$(3,2,-5)$；2）$(2,0,-1)$；3）$(0.5,\sqrt{2},0)$
4）$(0,0,3)$；5）$(-4,0,0)$；6）$(0,0,0)$

24. 1）$\boldsymbol{a}=(2,3,-5)$；2）$\boldsymbol{b}=(-1,-2,3)$

27. $\overrightarrow{AB}=(-6,7,-5)$；$\overrightarrow{MN}=(-4,-5,-4)$

28. 1）$(1,5,-3)$；2）$(5,3,-2)$；3）$(-2,5,-1)$；
4）$(6,9,-12)$；5）$(4,-3,8)$；6）$(-5,12,-9)$

29. 1）共线； 2）不共线

30. $n=6$，$p=\frac{8}{3}$

31. 1）3； 2）$\sqrt{14}$；　3）$\sqrt{2}$； 4）3

32. 1）5； 2）0　33. $6\sqrt{2}$

34. 3　35. 10

37. $C(5, -2, -2)$　38. $C(4, 0, -4)$

39. $(-2, 1, 3)$

41. 1）$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

2）$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{3}{5}$，$\cos\gamma=0$；

3）$\cos\alpha=0$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\gamma=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$；

4）$\alpha=0$；$\beta=\gamma=90°$

43. 1）23； 2）$\frac{1}{3}$　44. -8

45. 1）90°； 2）90°； 3）60°； 4）60°； 5）45°

47. $\arccos\frac{63}{65}$　48. $\arccos\frac{4}{9}$

49. $\arccos\frac{1}{11}$　51. $\cos(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})=\frac{2}{3}$

52. 1）垂直； 2）不垂直　54. $(\widehat{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}})=60°$

57. 1）0； 2）$24\boldsymbol{e}$； 3）$12\boldsymbol{e}$，这里$\boldsymbol{e}$为向量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的单位向量

59. $5\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$　　　61. $S=\sqrt{26}\approx5.1$（平方单位）

62. $S=5\sqrt{2}\approx7.07$（平方单位）

64. $m_0(f)=(3,4,3)$；$\alpha\gamma==44°39'$，$\beta=33°14'$

66. （0，2，0）　　　68. 10

69. （−1，2，5），（4，3，−2）

70. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$（1，5，−1），$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$（5，1，−9）

71. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=-\frac{1}{3}$

72. $\cos(\widehat{a,b})=\frac{4}{9}$　　73. $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$

小测验

第一组 1）$|\boldsymbol{a}|=9$；$\cos\alpha=\frac{4}{9}$，$\cos\beta=\frac{7}{9}$，$\cos\gamma=\frac{4}{9}$；

2）$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{3\sqrt{10}}{10}$；　3）$5\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}$

第二组 1）$\angle BAC=45°$；　2）$\frac{19}{13}$；　3）$5\sqrt{3}=8.66$

（平方单位）

第八章

1. 1）点A属于平面α；　2）点A不属于平面β；

3）直线a在平面α上；　4）直线a不在平面β上；

5）点B属于直线p；　6）点M不属于直线q；

7）直线a与平面α交于点A；

8）直线a与直线p交于点P；

9）直线b与平面β交于点B；

10）平面α和平面β交于直线q；

11）点A，B，C属于平面β；

12）点M和点N属于直线p；

13）平面α不是平面β的子集；

14）点M不属于直线AB；

15）直线CD不属于平面α

2．1）$B\in\beta$；　2）$a\not\subset\gamma$；　3）$\{A, B\}\subset b$；

4）$q\cap(MN)=A$；　5）$p\cap\alpha=c$；　6）$\alpha\cap\beta=p$；

7）$\alpha\cap\beta$；　8）$\{A, B, C\}\subset\alpha$；　9）$c\notin\beta$

5．1）和2）是无穷解集；3）可作一个平面

6．1）正确；2）不正确

9．一个，四个或六个

17．$\frac{\sqrt{11}}{16}a^2$　　18．$\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$

21．三对　　23．48cm

24．12cm　　25．4.5cm

26．1），2）是无穷解集　　38．10cm和15cm

39．18cm，27cm，36cm

42．1）直线a和b不相交，因此不能确定$p\perp\alpha$；

2）根据直线和平面垂直的条件可得$p\perp\alpha$

3）$p/\!/q\perp a \Rightarrow p\perp a, p/\!/q\perp b \Rightarrow p\perp b$，因而$p\perp a$，$p\perp b$，$a\cap b$，$\{a, b\}\subset\alpha \Rightarrow p\perp\alpha$

43．$\frac{m}{\sqrt{3}}$　　44．$\sqrt{l^2-\frac{a^2}{3}}$

45．$\sqrt{a^2+b^2+\frac{4h^2}{2}}$　　47．$\frac{\sqrt{2}}{2}a$

48．12cm和20cm　　49．24cm和26cm

50. 51cm　　51. 10cm

52. $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$　　53. $tg\varphi_1 = tg\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $tg\varphi_3 = \sqrt{2}$

54. $\sqrt{3}a$　　58. $\frac{\sqrt{3}}{2}m$

59. $\frac{2}{\sqrt{3}}m$　　60. $2\sqrt{13}$

61. $\sqrt{\cos 2\alpha}\, a$　　62. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$

63. $3cm^2$　　64. $75cm^2$

65. $42\sqrt{3}\,cm^2$　　66. $20\sqrt{2}\,m^2$

67. $2\sqrt{3}\pi m^2$　　69. $\frac{\sqrt{6}}{3}a$

70. $\arccos(\cos\alpha\cos^{-1}\frac{\alpha}{2})$　　71. $\frac{9}{8}a^2$

72. $\frac{1}{m}(a+b+c)(m+n)$　　74. 3.75cm

75. $\sqrt{m^2-a^2}$　　76. 17cm

77. 15cm, 20cm　　78. $\arccos(\sqrt{2}\cos\alpha)$

79. $2\text{arc ctg}(2\cos\alpha)$　　80. $\frac{0.5a\sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

81. $\arccos\frac{3}{4} = 41°24'$, $2\arccos\frac{3}{4} = 82°48'$

82. $2\arcsin\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}\right)$　　83. 45°

84．13cm

85．$\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$

86．$2(\sqrt{3}+1)a$

87．$90°$

88．$\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)$

小测验

第一组　1）32cm；　2）$12\sqrt{2}\,cm^2$

第二组　1）8cm；　2）$54cm^2$；

第九章

1．点A，B和D

3．$x+3y-2z-5=0$

4．$x+3y+2z+9=0$

5．$x-3y+z-7=0$

7．$z-1=0$

8．$z-3=0$

9．$y+2=0$

11．$x-y=0$

12．$2x-z=0$

14．$3x+2z-1=0$

15．$2y-3z+11=0$

17．$8x+7y+18z+35=0$

19．$2x-3y+z-7=0$

21．$2x-y+z-9=0$

22．$x+y-1=0$

23．$2x+3y+4z-3=0$

25．$72°02'$

27．1

28．11

30．$\sqrt{6}$

32．$\begin{cases} x-2y-3=0, \\ y-z-2=0 \end{cases}$

33．$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ z+2=0 \end{cases}$

35．$\begin{cases} x-2=0, \\ y+1=0 \end{cases}$

36．1）平行于OZ轴；　2）平行于OY轴；

　　3）平行于OX轴；

38．$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+1}{2}$

40．$x=1+t$，　$y=4+4t$，　$z=-3-3t$

42. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+3}{4}$

44. $\cos\alpha=\pm\dfrac{4}{13}$, $\cos\beta=\pm\dfrac{3}{13}$, $\cos\gamma=\pm\dfrac{12}{13}$

47. $68°53'$

49. $21°07'$

51. $2x+4y+3z+12=0$

53. $\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{7}$, $\cos\beta=\pm\dfrac{3}{14}\sqrt{14}$, $\cos\gamma=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{14}$

54. $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z+2}{-1}$

56. $(1, 7, -1)$

57. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+4}{2}$; $(1, -7, 2)$

63. $4x+2y-z-7=0$

64. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+3}{5}$; $x=-2+2t$, $y=2-4t$,

$z=-3-5t$

65. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{\sqrt{2}}$; $x=-t+1$, $y=t+2$,

$z=\sqrt{2}t+3$

66. $\dfrac{\pi}{3}$

67. $2x+y=0$

68. $2x-y+2z-9=0$

69. $(1, 4, -7)$

70. $\arcsin\dfrac{18}{91}$

71. $(0, 0, -2)$

小测验

第一组　1）$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-4}{-2}$；

$x=2-t$，$y=-3+4t$，$z=4-2t$；

2）$7x-2y+3z-6=0$；　　3）$\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{14}$

第二组　1）$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{7}$；

$x=1+3t$，$y=3-4t$，$z=-5+7t$；

2）$x+14y+9z-30=0$；　3）（10，10，－3）

第十章

1．三棱柱：5个面，6个顶点，9条棱，3条侧棱；
　　四棱柱：6个面，8个顶点，12条棱，4条侧棱；
　　六棱柱：8个面，12个顶点，18条棱，6条侧棱

2．三棱柱：18，9和6；四棱柱：24，12和8；
　　六棱柱：36，18和12；n棱柱：$6n$，$3n$和$2n$

3．0，4，18，$n(n-3)$

4．1）0，1，3，$n-3$，2）2，9，$\frac{n(n-3)}{2}$

5．$16d$，$24d$，$40d$，$8d(n-1)$

8．180°，360°，720°，180°$(n-2)$

11．$2m$和$\sqrt{5}m$；$\sqrt{3}m^2$和$2m^2$

12．$\frac{4}{9}\sqrt{3}a^2$

13．$\sqrt{n^2+0.5m^2}$

15．45°

16．180cm^2

17．300cm^2

18．4.5cm

19. 1)29; 2) $2\sqrt{14}\approx 7.84$　20. $\sqrt{2}a$和$2a$

23. $a=\frac{\sqrt{3}}{3}d$　24. $d=\frac{\sqrt{6}}{2}d_1$

25. $\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 35°15'$　26. $2\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 70°32'$

27. $12+4\sqrt{3}\approx 190(\mathrm{cm})$　28. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

29. $\frac{\sqrt{6}}{3}a$　30. 21

31. 50cm和 $50\sqrt{2}$cm　32. $h\sqrt{a^2+b^2}$

33. a^2和$\sqrt{2}a^2$　34. 1), 2), 3)能; 4)不能

35. $\sqrt{2}a^2$　36. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

37. $\frac{3}{4}\sqrt{3}a^2$　38. $\frac{3}{4}\sqrt{3}a^2$

39. $3\sqrt{2}a$, $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$　40. 16cm

42. $\mathrm{arc\,tg}(\frac{\sqrt{2}}{2}H)$　44. $\frac{\sqrt{6S}}{6}$

45. 1) $2l^2$; 2) $3\sqrt{2}Q$　46. $\sqrt{S}:\sqrt{Q}$

47. $\sqrt{Q^2+2Sh^2}$　48. $432\mathrm{cm}^2$

50. $\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$

51. $600\mathrm{cm}^2$　52. 10cm和24cm

53. $1056\mathrm{cm}^2$　54. $432\mathrm{cm}^2$

55. $140\sqrt{2}\text{cm}^2$

56. $(80+24\sqrt{2})\text{cm}^2$

57. 1) $3al+\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$; 2) $4al+2a^2$; 3) $6al+3a^2$

58. 4500cm^2

59. $4l^2\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}$ $(0<\alpha<90°)$

60. $48\sqrt{33}\text{cm}^2$

61. $3s$

62. 940cm^2

63. 120cm^2

64. 1600cm^2

65. 2696cm^2

66. 1360cm^2

67. $(\sqrt{2}+1)ab$

68. 600cm^2

69. $\sqrt{3}c(a+b)$

70. 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$

71. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}$

72. 1) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{h^2+a^2}$

74. $\frac{3}{2}a$, $\sqrt{3}a$

75. $\sqrt{3}m\cos\alpha$

76. $\frac{h\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}$

77. $\frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha}$

78. $\frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha}$

79. $\frac{5}{8}m^2\cos\alpha$

80. $\frac{\sqrt{3}}{4}m^2\cos\alpha$

81. $\frac{a^2}{2}\text{tg}\alpha$

82. $\frac{a^2}{4\cos\alpha}$

83. $180^\circ - 2\mathrm{arc\,ctg}(\sqrt{3}\cos\varphi)$

84. $9\sqrt{33}\mathrm{cm}^2$

88. 24cm

89. 6cm

91. 5cm和6cm

92. $2\sqrt{6}\ \mathrm{cm}^2$

93. 60°, 90°, 120°, 90°

94. 3cm

95. $\frac{s}{4}$

96. 1) $\sqrt{2}-1$; 2) 1; 3) $(\sqrt{n}-\sqrt{m}):\sqrt{m}$

97. $112.5\mathrm{cm}^2$, $50\mathrm{cm}^2$, $12.5\mathrm{cm}^2$

98. 18cm

99. $36\mathrm{cm}^2$

100. 1) $\sqrt{c^2-\frac{1}{3}(a-b)^2}$; 2) $\sqrt{c^2-\frac{1}{2}(a-b)^2}$;

3) $\sqrt{c^2-(a-b)^2}$

101. $n(n-3)$

102. $\frac{\sqrt{6}}{2}(a-b)$

103. 6dm

104. 72cm和18cm

105. 9cm

107. $26\mathrm{cm}^2$

108. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a\ (a+\sqrt{12h^2+a^2})$; 2) $a(a+\sqrt{4h^2+a^2})$;

3) $\frac{3}{2}a(\sqrt{3}a+\sqrt{4h^2+3a^2})$

109. $1458\mathrm{cm}^2$

110. 12cm和8cm

111. $\frac{a^2}{4}(\sqrt{7}+\sqrt{3})$

112. $3a^2$

113. $\sqrt{\sqrt{4h^2+M^2}-2h^2}$ 114. $4\sqrt{2}\mathrm{dm}^2$

115. $3s$ 116. $\frac{3}{2}a^2$

117. $\frac{3}{2}a(\sqrt{4h^2+3a^2}+\sqrt{3}a)$ 118. $\frac{3}{4}\sqrt{3(b^4-h^4)}$

119. $2\sqrt{3}r(k+r)$ 120. $768\mathrm{cm}^2$

121. $18\mathrm{cm}^2$ 122. $50\mathrm{m}^2$

123. $45\sqrt{3}\mathrm{cm}^2$

124. 1) $\frac{3}{4}(a+b)\sqrt{4h^2+\frac{1}{3}(a-b^2)}$；

2) $(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$；

3) $\frac{3}{2}(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2}$，

4) $\frac{n}{4}(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2\mathrm{ctg}^2\frac{180°}{n}}$

125. $1728\mathrm{cm}^2$ 126. $124\mathrm{cm}^2$

127. $432\mathrm{cm}^2$ 128. $273\mathrm{cm}^2$和$175\mathrm{cm}^2$

129. $1152\mathrm{cm}^2$ 130. $(2\sqrt{2}+\sqrt{3})a^2$

131. $906\mathrm{cm}^2$ 132. $480\mathrm{cm}^2$

133. $928\mathrm{cm}^2$ 134. 16cm，30cm和34cm

135. $6(6+\sqrt{3})r^2$ 136. $78\mathrm{cm}^2$

137. $2\sqrt{5}a^2$ 142. $(3+\sqrt{3})a^2$

小测验

第一组 1) $144+15\sqrt{3}\approx170\mathrm{cm}^2$； 2) $16\sqrt{3}\mathrm{cm}^2$

第二组　1）906cm²；　　2）30cm²

第十一章

1．10cm；$\arcsin\frac{4}{5}$

2．$25\pi\text{cm}^2$

3．480cm^2

4．$30\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

5．$\frac{3}{8}(4+\sqrt{3})a^2$

6．$2\text{arctg}\frac{1}{2}$

7．10cm

8．$0.5(\sqrt{1+\sin^2\alpha}-\sin\alpha)$

9．$12\sqrt{3}\,r^2$

10．40cm^2，100cm^2

11．$0.5a^2\text{ctg}\alpha$

12．60cm^2；13cm；$\arcsin\frac{12}{13}$

13．$\frac{48\pi}{\text{tg}\alpha}$

14．$32\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

15．$18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

16．$\frac{\pi R^2 m^2}{}$

17．$\sqrt{3}\,R^2$

18．$\frac{1}{3}H^2$

19．$0.5R\sqrt{2H^2-R^2}$

20．$\frac{2}{3}H^2$

21．$\frac{\sqrt{2}HR}{H+\sqrt{2}R}$

22．$\frac{\sqrt{3}HR}{H+\sqrt{3}R}$

24．$\frac{a^2}{12}\text{tg}\alpha$

25．$\frac{R}{\sqrt{R^2+H^2}}360°$

26．$\alpha=\frac{R}{L}360°$；在等边圆锥的情况下 $\alpha=180°$

27. $30°$　　　　28. $\frac{La}{360°}$

29. $\sqrt{H^2+(R-r)^2}$　　　　30. $(R-r)\text{tg}\alpha$

31. 34cm　　　　32. $(R+r)\sqrt{l^2-(R-r)^2}$

33. $\frac{1}{4}(\sqrt{M_1}+\sqrt{M_2})^2$　　　　34. $18cm^2$和$8cm^2$

35. $9cm^2$, $8cm^2$和$7cm^2$

36. $(\pm R, 0, 0)$, $(0, \pm R, 0)$, $(0, 0, \pm R)$

37. 1) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$;

2) $(x+3)^2+y^2+(z-4)^2=2$

38. 点A, B和D

39. 1) $(0, 0, 0)$, $R=4$; 2) $(1, -3, 5)$, $R=6$;

3) $(3, -4, 2)$, $R=5$; 4) $(-5, -1, -3)$, $R=6$

40. $x^2+y^2+z^2=29$　　41. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=14$

42. $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=21$

44. $(10, -6, 8)$和$(-10, 6, -8)$

46. 1　　　　47. 5

48. 4 cm

49. 1) $O(0, 0, 1)$ $r=2\sqrt{2}$; 2) $O(0,2,0)$, $r=\sqrt{5}$

50. 1) 点; 2) 圆　　　　51. $(R^2-a^2)\pi$

52. $(R^2-m^2):R^2$　　　　53. $\pi R^2\cos^2\alpha$

54. $\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$　　　　55. $\frac{a}{2}$和$\frac{\sqrt{3}}{2}a$

56. 7cm　　　　57. 11cm

58. $12\sqrt{3}R^2$　　　　59. $\frac{b^2}{2h^2}$

60. $\frac{\sqrt{6}}{4}a$ 和 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$

61. $\frac{b}{2\sin\alpha}$

62. $2R\sin\alpha$

63. $h\,\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

64. $\frac{3}{2}h$

65. 13cm

66. 5cm

67. 2.5cm

68. $16\pi\mathrm{cm}^2$

69. $\frac{l^2}{2h}$

70. $\frac{2\pi r(l-r)}{l}$

71. 12cm

72. 1) $\frac{l}{2\sin\alpha}$, 2) $l\cos\alpha\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

73. $h\sqrt{2Rh-l^2}$ $(h<2R)$

74. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{3}\sqrt{S\mathrm{ctg}\alpha}$

75. $\frac{4R^2}{\sin\alpha}$

76. 5cm

77. $\sqrt{Rr}$

78. $\frac{R}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R$

79. $R\sin\frac{\alpha}{2}$, $(2\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{2}))$

80. $\frac{1}{4}\pi r^2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{4}$

81. 90cm

82. $69.3\mathrm{cm}^2$

83. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{6}a$

84. 8cm

85. $\frac{R^2\mathrm{tg}\alpha\sqrt{\cos(\varphi+\alpha)\cos(\varphi-\alpha)}}{\cos\alpha\cos^2\varphi}$

86. $\dfrac{2\sqrt{2}\,d^2\sin(45°+\varphi)}{\sin\alpha\cos\varphi}$　87. 24cm^2

88. $45°$　89. $\dfrac{1}{4}\pi H^2$

90. 5cm　91. $27\pi\text{cm}^2$

92. 150cm^2　93. $24\pi\text{cm}^2$

94. 1）$2\pi r$；2）$r\text{tg}\dfrac{\alpha}{4}$ 或 $r\text{ctg}\dfrac{\alpha}{4}$

小测验

第一组　1）$\dfrac{2h}{2+\text{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$；2）$144\text{cm}^2$

第二组　1）$4d^2\text{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$；2）15cm

第十二章

1. 1）$\dfrac{\sqrt{3}}{9}l^3$，2）$\dfrac{\sqrt{6s}}{36}S$　2. $\dfrac{1}{2}M^4\sqrt{2M^2}$

3. $\sqrt[3]{m^3+n^3}$　4. 12cm

5. $\sqrt{S_1S_2S_3}$　6. 9829cm^3

7. $48\sqrt{11}\ \text{cm}^3$

8. $l^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

9. $2048\sqrt{3}\,\text{cm}^3$　10. 5040cm^3

11. $3536\sqrt{3}\,\text{cm}^3$　12. 3840cm^3

13. $a^3\sin\alpha\text{ctg}\beta$　14. $2a^3\sin\alpha\text{tg}\beta\cos\dfrac{\alpha}{2}$

16. 10cm　　17. 边长为$\sqrt[3]{V}$的立方体

18. 底面边长等于$\sqrt[3]{2V}$，高等于$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$

19. 底面边长等于$\frac{1}{3}\sqrt{3S}$，高等于$\frac{1}{6}\sqrt{3S}$

20. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}ha^2$;　　2) ha^2;　　3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}ha^2$

21. $\frac{1}{8}a^3$　　　　22. $1530cm^3$

23. $\sqrt{0.5pqm\sin\alpha}$　　24. $24\sqrt{2}\,cm^3$

25. $0.5a^3\sqrt{\sin(\alpha+30°)\sin(\alpha-30°)}$

27. $a^2 ctg\varphi\sin\beta$　　28. $abl\sin\alpha\sin\beta$

29. 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$;

3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$

30. $\sqrt{3}h(k^2-h^2)$　　31. $\frac{1}{6}\sqrt{Q(S^2-Q^2)}$

32. $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$　　　　33. 1∶27

34. $\frac{8S\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{2S ctg\alpha}}{3\sin\alpha}$

35. $\frac{a^3\sin\alpha}{24\cos(\alpha+30°)\cos(\alpha-30°)}$　$(0<\alpha<60°)$

36. $\frac{1}{6}S\cos\alpha\sqrt{S\sin\alpha}$　　37. $\frac{\sqrt{3}}{18}a^3$

38. $500\mathrm{cm}^3$　　39. $80\mathrm{cm}^3$

40. $\frac{1}{3}\mathrm{m}^3$

41. $\frac{4}{3}a^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$

42. $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\beta$

43. 1) $\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\sqrt{3l^2-(a-b)^2}$;

2) $\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\sqrt{l^2-\frac{1}{4}(a-b)^2}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+ab+b^2)\sqrt{l^2-(a-b)^2}$

44. $\frac{784}{3}\mathrm{cm}^3$。　　45. $624\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$。

46. $\frac{1}{12}(a^3-b^3)\mathrm{tg}\alpha$　　47. $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{-\cos2\varphi}}{6\cos\varphi}$

48. $1900\mathrm{cm}^3$　　49. $\frac{ab(n^3-1)\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{tg}\alpha}{12n^3}$

50. $\cos\alpha:\sin\alpha$　　51. $\frac{1}{8}\pi dl\sin2\alpha\cos\alpha$

52. $\frac{1}{4}\pi S\sqrt{S}$　　53. 21.5%

55. 圆柱的高等于$\frac{2\sqrt{3}}{3}R$，底面半径等于$\frac{\sqrt{6}}{3}R$。

56. $a=\pi$

57. $\frac{1}{3}\pi a^3\sin\alpha\text{tg}\alpha$

58. $\frac{a^2R^3\sqrt{4\pi^2-a}}{24\pi^2}$

59. $V_a:V_b=(a+2b):(2a+b)$

60. $2\pi a^3\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$

61. $\frac{1}{3}\pi r^3\text{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\text{tg}\alpha$

63. 底面半径等于$\frac{\sqrt{6}}{3}l$，高等于$\frac{\sqrt{3}}{3}l$

64. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$；底面半径等于$\frac{\sqrt{6}}{3}R$，高等于$\frac{\sqrt{3}}{3}R$

65. $\frac{1}{3}\pi\text{tg}\alpha\ (R^3-r^3)$

66. $11470\pi\text{cm}^3$

67. $\frac{676}{3}\pi\text{cm}^3$

68. $793\pi\text{cm}^3$

69. $2\pi a^3\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$

70. $\frac{7}{6}\pi l^3\sin2\alpha\cos\alpha$

71. 12cm

72. 47.6%

73. $1:3\sqrt{3}\approx0.19$

74. $3:2:1$

75. 2149cm^3

76. $45\pi\text{cm}^3$和$243\pi\text{cm}^3$

77. $5:16$

78. $\frac{512}{3}(16-9\sqrt{3})\pi\text{cm}^3$

79. $\frac{416}{3}\pi\text{cm}^3$

80. $\frac{1}{3}\pi R^3$

81. $112500\pi\text{cm}^3$

82. $\frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{4}$

83. $\dfrac{\pi h^3}{6\sin^4\dfrac{\alpha}{2}}$　　84. $\dfrac{37532}{3}\pi cm^3$或$\dfrac{11968}{3}\pi cm^3$

85. $34182\pi cm^3$

87. 1) 1.5π立方单位；　2) 12π立方单位；
　3) 24π立方单位；　4) 4π立方单位

89. 1) $\dfrac{16}{15\pi}$立方单位；　2) 8.1π立方单位，

　3) $\dfrac{\pi}{30}$立方单位

91. $\dfrac{16}{3}\pi$立方单位　　92. $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

94. $\dfrac{4}{3}\pi a^2 b$立方单位

96. 1) $\dfrac{32}{3}\pi$立方单位；　2) 16π立方单位

97. 1) $\dfrac{\pi^2}{2}$立方单位；　2) $\dfrac{\pi^2}{4}$立方单位

99. 1.5π立方单位

101. 1) $\dfrac{152}{3}\pi$立方单位；　2) 30π立方单位；

　3) 71.1π立方单位；　4) $\dfrac{32}{3}\pi$立方单位

102. $3600cm^3$　　103. $3500\sqrt{3}\,cm^3$

104. $\dfrac{\sqrt{2}}{128}m^3\cos\varphi\sin 2\varphi\sin 2\alpha\sin^{-3}(45^\circ+\varphi)$

105. $\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$

106. $2\sqrt{3}a^2$, $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

107. $\frac{3}{4}a^3$

108. $\frac{2}{3}h^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\mathrm{tg}^2\varphi$

109. $\frac{2}{3}H^3\mathrm{ctg}\beta\mathrm{ctg}\gamma\sin\alpha$

110. $96.75\mathrm{cm}^3$

111. $\frac{1}{8}\pi l^3\cos\varphi\sin2\varphi\sin^{-2}\frac{\alpha}{2}$

112. $\frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}\sin^{-1}\frac{\alpha}{2}$

113. $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$

114. $\frac{676}{3}\pi\mathrm{cm}^3$

115. $\frac{1}{3}\left(2+3\sqrt{2}\right)\pi R^3$

116. $3\pi R^3$

117. $\frac{3}{8}\pi R^3$

118. $\frac{3}{4}\pi R^3$

119. $2\pi R^2\sqrt{R^2-r^2}$

120. $\frac{10}{81}\pi l^3\sin2\alpha\cos\alpha$

121. πa^3

小测验

第一组　1) $4\sqrt{3}\mathrm{cm}^3$; 2) $\frac{\pi a^3\sin^2\alpha}{6\cos\alpha}$; 3) $\frac{\pi}{2}$立方单位

第二组　1) $360\mathrm{cm}^2$; 2) $2\pi a^3\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 3) $\frac{16}{15}\pi$立方单位

第十三章

1. $S\pi$　　2. $l^2\pi$

3. $20\pi\text{cm}^2$　　4. $\frac{a^2}{2}\pi\left(a+2H\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin^{-2}\frac{\varphi}{2}$

5. $\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$　　6. 9cm

7. $12\pi a^2$

9. 底面半径等于$\frac{0.5HR}{H-R}$，高等于$\frac{0.5H(H-2R)}{H-R}$

10. 底面半径等于$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，高等于$2R$

11. 底面半径和高都等于$\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

12. 底面半径等于$\frac{\sqrt{2}}{2}R$，高等于$\sqrt{2}R$

13. 底面半径和高都等于$\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$

14. 底面半径等于$\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$，高等于$2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

15. $\sqrt{M^2+\pi^2N^2}$　　16. $\sqrt{3}\pi Q$

17. $0.5\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^{-2}\frac{\varphi}{2}\cos^{-1}\alpha$

18. $2\pi R^2\sin\frac{\beta+\alpha}{4}\cos(\beta-\alpha)\sin^{-1}\frac{\beta}{2}$

19. $40.8\pi\text{cm}^2$　　20. $\frac{1}{6}\left(4\sqrt{3}+7\right)S$

21．$\pi r^2\sin\frac{180°}{n}\sin^{-1}\frac{\alpha}{2}$　　22．$120\pi cm^2$

23．$0.5\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^{-1}\alpha$　　24．$2\pi m^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$

26．底面半径等于$\frac{2\sqrt{2}}{3}R$，高等于$\frac{4}{3}R$

27．$2\pi(R^2-r^2)$　　28．$\frac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}$

29．$\frac{2Rr}{R+r}$　　30．$2\pi l^2\sin\left(15°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15°-\frac{\alpha}{2}\right)$

31．$\arccos\frac{m-n}{p}$　　32．$\frac{m+n}{m-n}\pi l\cos\frac{\alpha}{4}$

33．$169\pi cm^2$　　34．$\frac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}$

35．1) $\frac{\pi S}{6}$；2) $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi S$；3) $\frac{\pi m^2}{2}$；4) $\frac{4}{9}S$

36．1) 3∶1；　2) 9∶1；　3) 2∶1；　4) 4∶1

37．$\sqrt[3]{36\pi V^2}$　　38．$2500cm^2$

39．$275\pi cm^2$　　40．$4\pi R^2\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$

41．$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+2\right)\pi R^2$　　42．$2R\pm\sqrt{4R^2-\frac{S}{\pi}}$

43．$\frac{21\pi Q}{4\pi-3\sqrt{3}}$　　45．$2\pi rH$

46．$2\pi rH$　　47．8π平方单位

48. 70π平方单位　　　　50. 40π平方单位

51. $\frac{56}{3}\pi$平方单位　　　　52. 49π平方单位

53. $17640\pi \text{cm}^2$或$16800\pi \text{cm}^2$

54. 90π平方单位　　　　55. $4\sqrt{2}:3$; $4:3$

56. $2:3$（两种情况）　　　　57. $30\pi \text{cm}^2$

58. 2.5cm，1.5cm

59. $\pi a^2 \text{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(15°+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15°-\frac{\alpha}{4}\right)$,

$\frac{1}{6}\pi a^3 \text{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

60. $2\pi m(m+n)\sin\alpha$　　　　61. $\frac{\pi h^3}{l}$

62. $6\pi a^2$　　　　63. $\pi h^2 \text{tg}\frac{\alpha}{2}\sin^{-1}\beta$

64. $50\pi \text{cm}^2$和$2450\pi \text{cm}^2$　　　　65. 10cm

67. $\frac{2S}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}$　　　　68. $\frac{2}{3}S$

69. $0.5\text{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^{-1}\alpha$

小测验

第一组　1) $4\sqrt{2}\pi S\cos\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $\frac{\pi l^2}{\cos^2\alpha}$

第二组　1) $8\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $4\pi l^2\sin^2\alpha \text{tg}^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学自学指南
作者＝（苏）Ｈ．Ｂ．巴格莫洛夫著　　王书编译
页数＝４４６
ＳＳ号＝１０８８４３９０
出版日期＝１９８８年０１月第１版